Mapas del metro y redes neuronales

La teoría de grafos

Claudi Alsina



El mundo es matemático

Mapas del metro y redes neuronales

La teoría de grafos

Claudi Alsina

El mundo es matemático

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Babel, disseny i maquetació, S.L.
Créditos fotográficos: age fotostock, gettyimages

ISBN: 978-84-473-6960-7
Depósito legal: B-27315-2010

Impreso por Printer Industria Gráfica Newco, S.L.

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

La perfección de la belleza matemática
es tal que lo que es más bello y regular
resulta también ser lo más útil y excelente.
D'Arcy Thompson

Prefacio

Nuestro mundo cultural no sólo tiene letras y números, hoy en día está repleto de imágenes. Las imágenes que forman parte de nuestra vida son, además, de tipos muy diversos. Junto a las de nuestro entorno natural, nos rodean fotografías de todo tipo (desde recuerdos de vacaciones hasta vallas publicitarias) y obras de arte de los más diferentes estilos..., y en medio de todas ellas, esquemas no convencionales. Hay esquemas en los logos de empresas y coches, en las indicaciones de tráfico, en los mapas... Piense en el esquema de su línea de metro o autobús: una línea con puntitos que lleva nombres de paradas y nada más. Muchos de estos esquemas con puntos y líneas son grafos. Y ellos son nuestro objetivo en esta publicación.

Le invitamos a descubrir que estos grafos son potentes por su extraordinaria sencillez, que son esquemas que permiten resolver muchos problemas interesantes y forman ya parte, con luz propia, de las matemáticas actuales.

El primer capítulo se centra en el nacimiento de la teoría de grafos a través de un problema turístico-recreativo que Euler resolvió de forma genial. Se podrá ver su fulgurante desarrollo temático durante el siglo XX y conocer a algunos de sus impulsores. Una vez familiarizados con lo más básico sobre grafos, se observarán unas primeras ideas de grafos interesantes. Ello ya permitirá aclarar la presencia viva y actual de estos grafos en nuestra vida cotidiana: dónde están y para qué sirven.

El segundo capítulo aborda el viejo y curioso problema de colorear grafos. Una cuestión aparentemente inocua como saber cuál era el mínimo número de colores necesarios para pintar un mapa (usando colores diferentes en países con frontera común) llevó desde 1852 hasta 1976 a una intensa labor en grafos. Al final se aclaró que cuatro colores eran suficientes, pero en los más de cien años transcurridos el desarrollo de la teoría fue espectacular. Es decir, también en grafos a veces la travesía es más importante que la llegada a puerto.

El tercer capítulo está dedicado a los distintos circuitos que tienen interés en un grafo. Siguiendo a un cartero chino y a un viajante de comercio se verá que optimizar rutas, planificar tiempos o evaluar costes son actividades más fáciles con el análisis de grafos, descubriendo de paso por qué esta teoría sirvió para llevar el hombre a la Luna y está sirviendo hoy en día para el reparto de mercancías en las cadenas comerciales o para seguir la construcción de un edificio.

El cuarto capítulo presenta relaciones sorprendentes entre grafos y objetos geométricos. A través de la fórmula de Euler que cantaban los escolares («caras más

vértices igual a aristas más dos») se observará cómo contando sobre grafos se estudian poliedros e incluso mosaicos.

Finalmente, el último capítulo versa sobre otras aplicaciones de los grafos, que van desde Internet y temas científico-técnicos hasta los estudios sociales, sin olvidar el aspecto lúdico de muchos juegos basados en grafos, los cuales permiten poner a prueba nuestro ingenio mental.

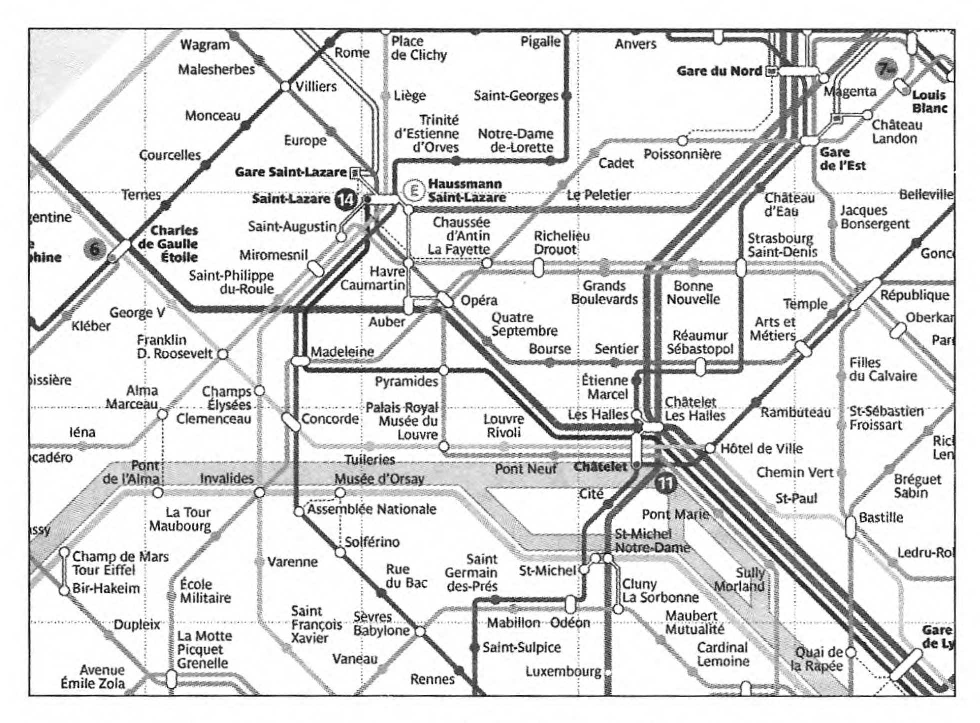
Los grafos están ahí, en la ciencia, en la investigación, en la vida personal y ciudadana. Nos gustaría que este libro le ayudara a entender su importancia para que pueda incorporarlos a su forma de mirar el mundo. Lo simple puede ser muy útil. Si además es bello, mucho mejor.

Capítulo 1

Invitación a los grafos

Lo bueno si breve, dos veces bueno.
Refranero popular

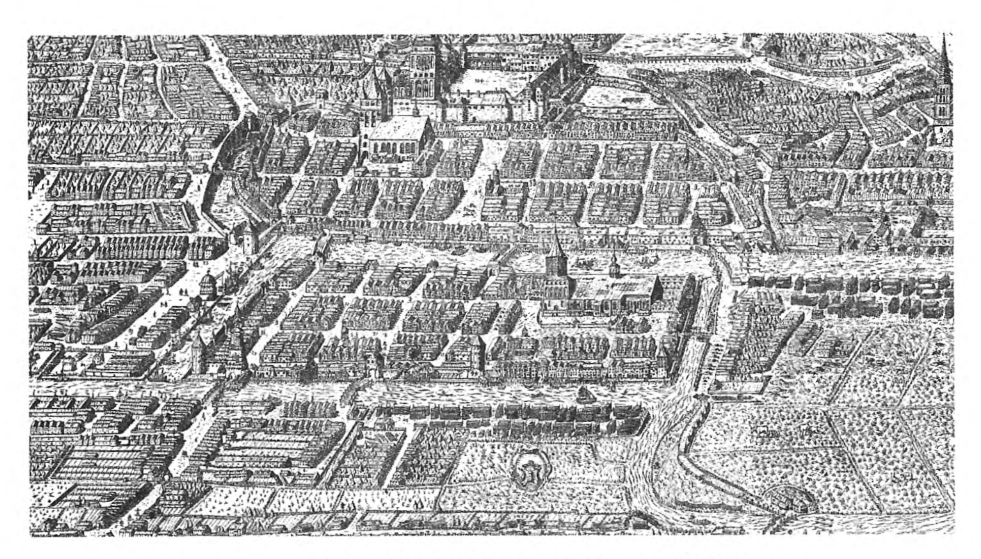
La extraordinaria belleza de los grafos reside en su simplicidad, ya que se trata de unos puntos y unas líneas entre esos puntos. Pero lo realmente sorprendente es la potencia que la reflexión sobre estos esquemas puede tener. El presente capítulo le invita a iniciar su visita a la teoría de grafos. Tenga ya presente desde el principio, contemplando este grafo de un mapa de metro, que dichos objetos matemáticos no son ajenos a su vida.



Los mapas de metro, como éste correspondiente a la ciudad de París, son unos de los muchos ejemplos de grafos que podemos encontrar en nuestra vida cotidiana.

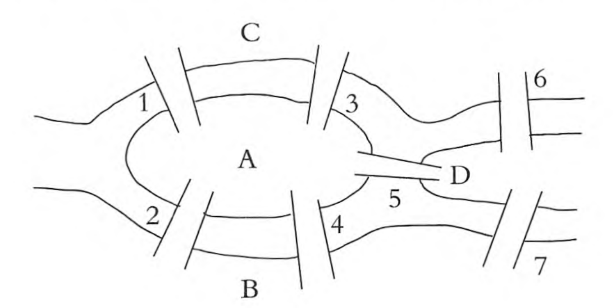
Desde Königsberg con amor

La teoría de grafos se inició gracias a un problema turístico-recreativo que resolvió Leonhard Euler. Dice la historia que en 1736 el eminente matemático se detuvo, en uno de sus viajes, en Königsberg (actual Kaliningrado). Dicha ciudad estaba dividida en cuatro partes, conectadas por siete puentes, al pasar por ella un río.



La antigua ciudad de Königsberg en un grabado del siglo XVII.

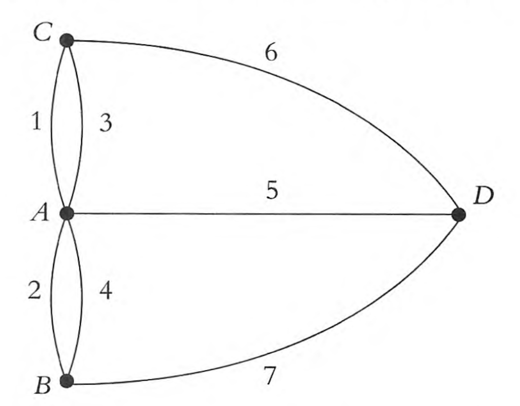
Una versión simplificada de esta disposición, numerando los puentes y designando con letras cada una de las cuatro áreas urbanas, sería la siguiente:



Respecto al problema de los puentes, Euler escribió: «El problema que, según entiendo, es muy bien conocido, se enuncia así: en la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay una isla, llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel. Hay siete

puentes que cruzan los dos brazos del río. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez. Se me ha informado de que mientras unos negaban la posibilidad de hacerlo y otros lo dudaban, nadie sostenía que fuese posible realmente».

La respuesta del propio Euler fue que no era posible y basó su negativa en el siguiente tipo de razonamiento: prescindiendo de la geografía peculiar de la ciudad y su entorno puede trazarse un esquema de la misma mediante cuatro puntos A, B, C, D (que se correspondan con las cuatro partes de la ciudad), y unir con curvas arbitrarias aquellos puntos conectados en la realidad por puentes:



El problema inicial es, de hecho, equivalente al problema (basado en la figura anterior) según el cual si partiendo de uno de los cuatro puntos puede trazarse un itinerario que englobe todas las curvas una sola vez. Si ello fuese posible el número de líneas por cada punto debería ser par (como se verá en el capítulo 3) y, en cambio, todos los puntos tienen un número impar de líneas. Por tanto, el problema no tiene solución.

Los puentes de Königsberg fueron destruidos durante la Segunda Guerra Mundial, pero la anécdota, atribuida a Euler, fue el principio de una teoría matemática de gran utilidad y brillantez: *la teoría de grafos*. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que antes de llegar a su formulación precisa fueron muchos los científicos que de forma totalmente independiente utilizaron conceptos que a posteriori se han visto unificados con la teoría de grafos.

En 1847 Kirchhoff manejó esquemas en forma de grafo al trabajar sobre circuitos eléctricos; en 1857 Cayley estudió la enumeración de isómeros de un compuesto orgánico usando grafos en los que cada punto estaba unido con una o cuatro líneas correspondientes a las valencias de enlace; en 1869 Jordan estudió estructuras arbo-

LEONHARD EULER (1707-1783)



Euler ha sido uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos. Nacido en Suiza, pasó gran parte de su vida en las Academias de San Petersburgo y Berlín. Publicó más de 500 obras y la edición de sus contribuciones precisó de 87 tomos. Brilló especialmente en álgebra, teoría de números, geometría, análisis, mecánica, astronomía, física, etc. y numerosos son los teoremas, fórmulas y conceptos que hoy llevan su nombre. Curiosamente, a partir de quedarse ciego en 1766 realizó el 54% de su obra. Por su reflexión sobre los puentes de Königsberg se le considera el pionero en la teoría de grafos.

rescentes de forma abstracta. En 1859 Hamilton ideó (como se verá más adelante) un juego de recorridos en un poliedro que años después daría lugar a los circuitos hamiltonianos, de gran interés por sus aplicaciones. En 1852 surgió el problema de colorear mapas de forma que países con frontera común tuviesen una coloración diferente y ello motivó muchas investigaciones sobre grafos. Lewin introdujo en psicología esquemas como los anteriores al representar a personas mediante puntos y unir aquellos puntos si las personas representadas tenían relaciones personales. Whlenbeck, Lee y Young, en física, usaron esquemas con puntos y líneas al simbolizar estructuras moleculares y sus interacciones.

Lo común en todos los casos pioneros era llegar a simbolizar un problema concreto mediante un esquema gráfico o grafo, formado por puntos y líneas que los unen, y estudiar entonces soluciones al problema inicial planteado mediante reflexiones sobre el esquema gráfico asociado. Como situaciones totalmente dispares pueden dar lugar a los mismos esquemas gráficos, estudiando éstos en general se obtienen (¡a la vez!) soluciones a problemas múltiples. Por supuesto, la elaboración de un grafo representa siempre una renuncia a muchas condiciones y características, pues el grafo como tal debe ser un esquema simple. Nótese también que el trazado de un grafo no es un problema de geometría métrica, es decir, la forma de las líneas que unen puntos es cualquiera: interesa visualizar las relaciones, las conexiones, las interacciones... no hacer la fotografía de un trazado.

A lo largo del siglo XX la teoría de grafos se desarrolló enormemente tanto en el ámbito matemático como en el de sus aplicaciones en todos los campos, desde la

PIONEROS DE LA TEORÍA DE GRAFOS

Ilustres personajes como William Thomas Tutte, Frank Harary, Edsger Wybe Dijkstra o Paul Erdös con sus investigaciones, sus libros de referencia y sus ingeniosos problemas han contribuido a desarrollar y difundir la teoría de grafos.

El británico William Thomas Tutte (1917-2002) inició su formación en química pero su afición inicial por problemas recreativos de matemáticas le llevó a doctorarse en esta disciplina y a ejercer como investigador y profesor en Canadá a partir de 1948. Durante la Segunda Guerra Mundial hizo grandes contribuciones en el descifrado de los mensajes codificados alemanes. Sus 168 artículos y sus grandes libros dieron especial esplendor al desarrollo de la teoría de grafos y con ella a los estudios de combinatoria y matemática discreta. Muchos resultados y conceptos de grafos llevan hoy su nombre.

El estadounidense Frank Harary (1921-2005) está considerado el padre de la moderna teoría de grafos y, de hecho, se le conoce como Mr. Graph Theory («el señor de la teoría de grafos»), lo cual está del todo justificado. Sus 700 artículos, sus innumerables conferencias en 87 países, la prestigiosa revista *Journal of Graph Theory* que fundó en 1977 y su libro *Graph Theory* de 1969, considerada la obra de referencia más relevante sobre el tema, justifican plenamente el reconocimiento internacional que ha merecido Harary. Aplicó la teoría de grafos no sólo en matemáticas y ciencias de la computación, sino en campos tan diversos como la antropología, la geografía, la lingüística, el arte, la música, la física, la ingeniería, la investigación operativa, etc.

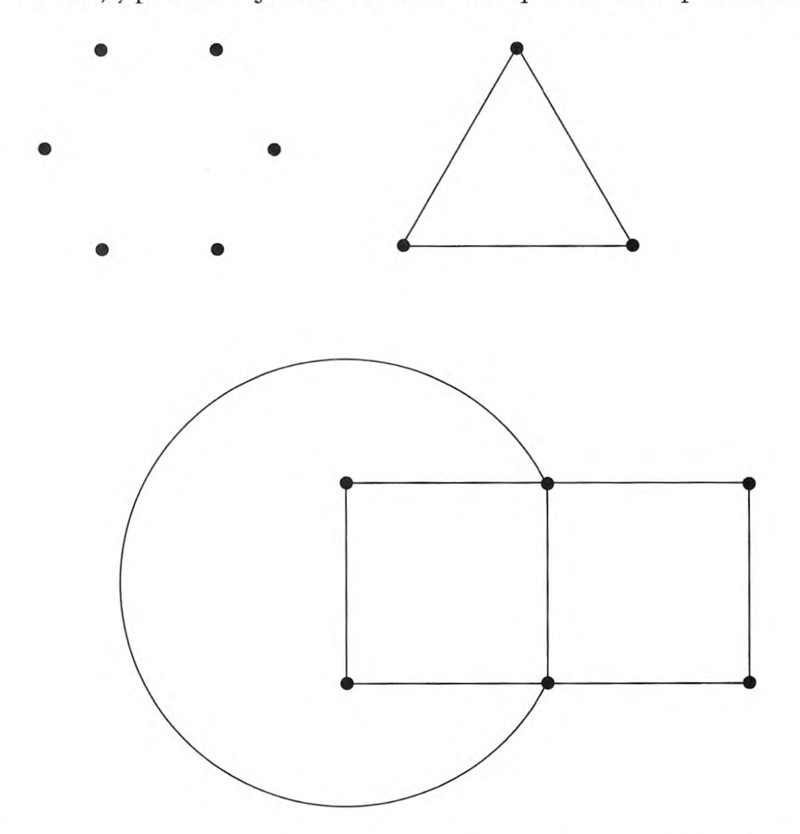
El holandés Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002) se interesó muy pronto por los programas de ordenadores y trabajó toda su vida en este campo, primero en Holanda y a partir de 1970 en la Universidad de Texas, en Austin. Ganó en 1972 el prestigioso Premio A.M. Turing por sus contribuciones fundamentales a lenguajes de programación. A él se debe la famosa frase «las ciencias de la computación están tan relacionadas con los ordenadores como la astronomía con los telescopios», y es que Dijkstra nunca usó ordenador (salvo para enviar *e-mails* y realizar consultas en Internet), escribiendo siempre sus trabajos sobre algoritmos y lenguajes... ¡a mano!

Paul Erdös (1913-1996) nació y estudió en Budapest pero desarrolló a lo largo de su vida la labor internacional más extensa y con más colaboraciones que se conoció en el siglo XX. Su privilegiada inteligencia le permitió destacar en teoría de grafos, combinatoria, geometría y teoría de números, campos en los que supo formular magníficos problemas y conjeturas, escribiendo más de 1.500 artículos. Según Erdös, Dios debía tener un libro en el que estaban todas las demostraciones matemáticas más bellas. Erdös contribuyó como pocos a ampliar este libro (a pesar de ser ateo).

investigación operativa para hallar soluciones óptimas a los problemas de planificación hasta las ciencias sociales, la arquitectura, el urbanismo, la ingeniería y muy especialmente las ciencias de la computación, la telecomunicación, etc. Matemáticamente, los grafos están ligados hoy a la combinatoria, a la llamada matemática discreta, a la topología, a la teoría de algoritmos, a la teoría de nudos, etc. Muchas teorías han permitido el desarrollo de los grafos y a su vez éstas han dado interesantes artillerías para resolver problemas planteados en otras especialidades.

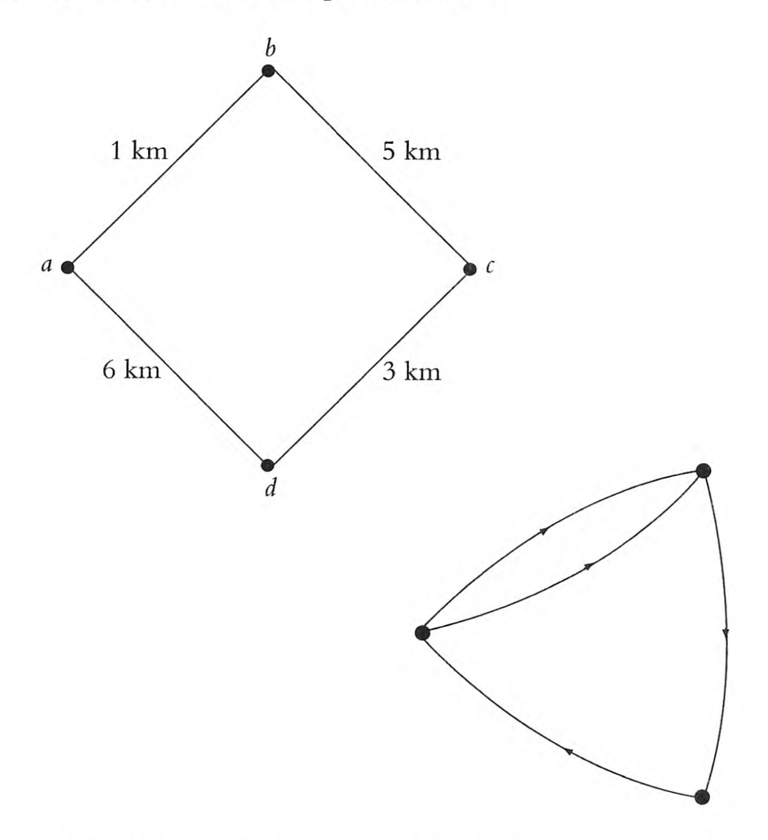
El ABC de la teoría de grafos

Un grafo viene determinado por un conjunto de *puntos* (llamados elementos, vértices, nudos o nodos) y por un conjunto de *aristas* o líneas que relacionan pares de vértices.



En las tres figuras anteriores se puede apreciar: un *grafo nulo* formado sólo por vértices; un *grafo completo* formado por tres vértices y sus 3 aristas, y un grafo de seis vértices con 8 aristas. Dos vértices relacionados por una arista se denominan

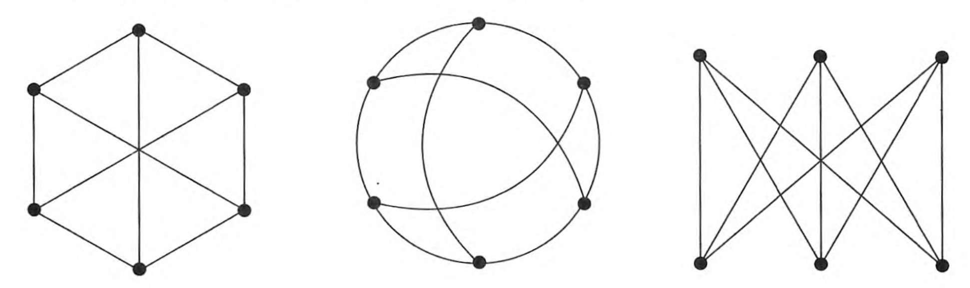
adyacentes, dos aristas que comparten un vértice se denominan *incidentes*. El *grado* de un vértice es el número de aristas que inciden en él.



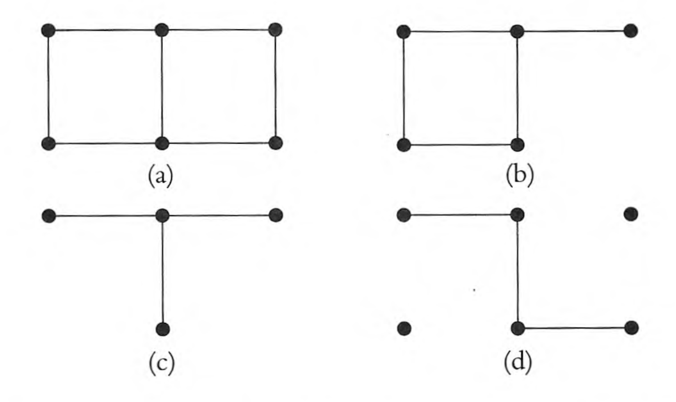
Si al grafo se añaden letras, números, informaciones, pesos, etc. se habla de *grafos etiquetados y ponderados,* y si en las aristas se introducen flechas para indicar direccionalidades, a dichas aristas orientadas se las denomina *arcos*. Cuando todas las aristas son arcos se habla de *grafos dirigidos* o *dígrafos*.

Si bien podrían describirse grafos con listas, tablas o con largas expresiones lo bonito del caso es que admiten representaciones muy flexibles: cada vértice se representa con un *punto*, círculo, rectángulo, etc. y cada arista, con una *línea continua* que una los vértices correspondientes (la línea puede ser un modesto segmento o puede ser una artística curva). Dada esta flexibilidad de representaciones es muy importante saber averiguar cuándo dos representaciones son *equivalentes (isomorfas)*: deben representar los mismos vértices y explicitar las mismas conexiones entre ellos, es decir, debe haber una correspondencia biunívoca entre los vértices y las respectivas aristas de forma que dicha correspondencia conserve los grados de los vértices.

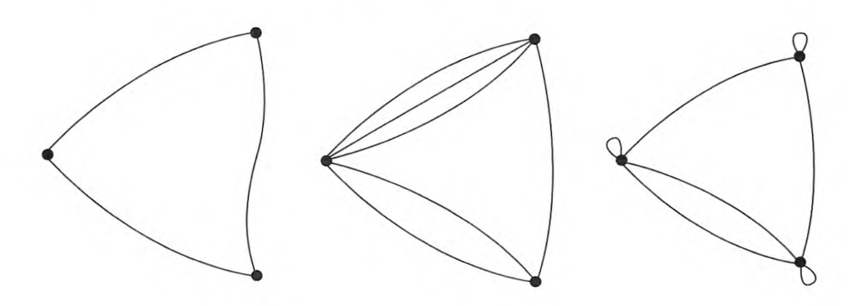
Las tres figuras siguientes corresponden a tres representaciones distintas de un mismo grafo. ¡Hay que mirar mucho para llegar a ver!



En las figuras que se muestran a continuación se observan cuatro grafos (a), (b), (c) y (d). El de referencia es (a) y los otros tres son *subgrafos* de (a), es decir, para formar un subgrafo deben escogerse algunos de los vértices y algunas de sus aristas correspondientes. Este concepto es importante pues permite estudiar grafos por partes.



Es bastante común distinguir entre tres tipos de grafos: los grafos propiamente dichos, los multigrafos y los pseudografos. En las figuras siguientes encontramos, de izquierda a derecha, un ejemplo de cada caso.



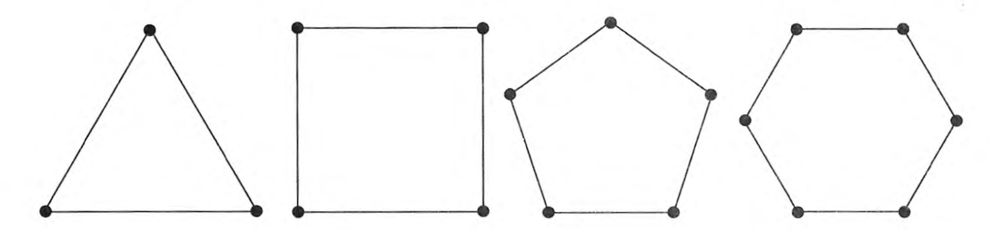
Si dos vértices sólo pueden conectarse por una arista se dice que se trata de un *grafo;* si pueden hacerlo por más de una arista, se habla de *multigrafo,* y si en un multigrafo un vértice puede unirse consigo mismo (la arista de autounión se dice que genera un *bucle)* entonces es un *pseudografo.* En este libro se denomina grafo a cualquiera de los tres tipos y en cada caso concreto se matiza si existen restricciones.

Respecto a los recorridos especiales que pueden hacerse en un grafo existe la siguiente nomenclatura. Sea G un grafo etiquetado con vértices V_0, V_1, V_2,... y aristas X_1, X_2, X_3..., un *paseo* en G es una sucesión finita del tipo $V_0, X_1, V_1..., V_{n-1}, X_n, V_n$, donde se van enlazando vértices con aristas. Si se escribe (V_0, V_1..., V_n) se sobreentiende que sólo existe una arista entre dos vértices y se recorre el paseo determinado por dichos vértices. Si $V_0 = V_n$, *es decir, el vértice de partida es el mismo que el de llegada,* el paseo se considera *cerrado,* y su caso contrario, *abierto.* Un *camino* es un paseo en el cual cada arista se recorre sólo una vez. Un paseo cerrado con *n* puntos o vértices distintos se llama *ciclo.* Nótese que cualquier ciclo puede representarse gráficamente por un polígono, como veremos a continuación.

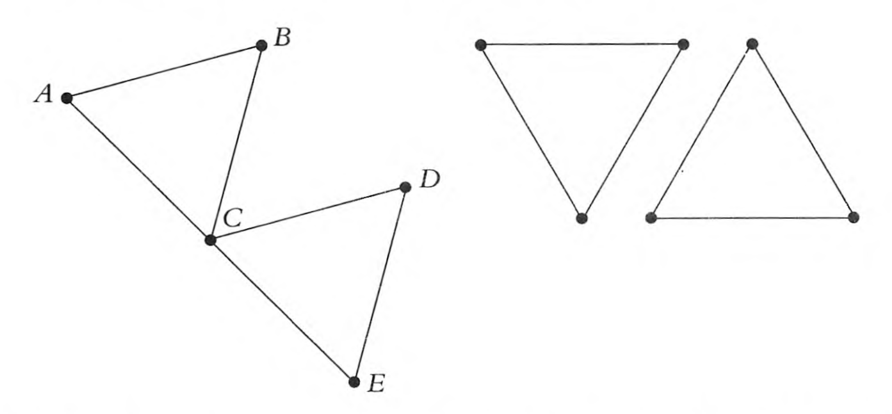
GRAFO/GRÁFICOS

Grafo: he aquí una palabra multiuso, ya que puede designar el conjunto de grafías de una letra, significar escritura (grafología, grafomanía...), indicar lo que escribe o el que escribe (bolígrafo, telégrafo, mecanógrafo...), hacer referencia a todo tipo de diagramas matemáticos y estadísticos... y, en el caso más genuino de teoría de grafos, estos esquemas discretos de puntos y líneas. Así, en los gráficos lineales formados por líneas poligonales o sucesión de segmentos rectos que van uniendo puntos, o en las ya clásicas gráficas de funciones donde aparecen representados dos ejes cartesianos *X* e *Y* en relación a los cuales se dibujan los puntos $(x, f(x))$ que constituyen la *gráfica de la función* $y = f(x)$, se puede observar que de hecho se trata de diagramas que asocian a cada punto *x* del eje *OX* el punto $(x, f(x))$ de la función. Son, pues, un tipo especial de «grafos».

En la propia representación de relaciones entre elementos de un conjunto finito es habitual hacer un grafo. Por ejemplo, en relaciones de equivalencia que permiten clasificar los elementos en clases, los «puntos» del grafo representan a dichos elementos y se trazan las «líneas» entre elementos relacionados o equivalentes (así, si la relación es *reflexiva*, es decir, todo elemento está relacionado con sí mismo, se traza un bucle). En relaciones de orden también se usan grafos dirigidos representando los arcos con flecha la relación «ser menor que». En el Anexo se explican con detalle las relaciones entre grafos y teoría de conjuntos.



Si entre dos vértices cualesquiera del grafo se puede describir un camino que los una se dice que el grafo es *conectado*, como en el caso de las cuatro figuras anteriores. En el caso de grafos conectados tiene sentido hablar de la *distancia* entre dos vértices u y v como la mínima cantidad de aristas que permiten enlazar u con v.

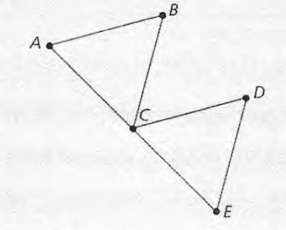


De los dos ejemplos anteriores, el de la izquierda es conectado y el de la derecha no lo es.

GRAFOS Y NÚMEROS

Cuando entre dos vértices hay arista o no la hay (no existen varias) la información gráfica puede pasarse a números mediante una tabla o *matriz*. Al grafo conectado *ABCDE* de la figura se le asocia la tabla siguiente, en la que se coloca un 1 si hay arista y un 0 si no la hay.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	1	0	0
C	1	1	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	0	0	1	1	0

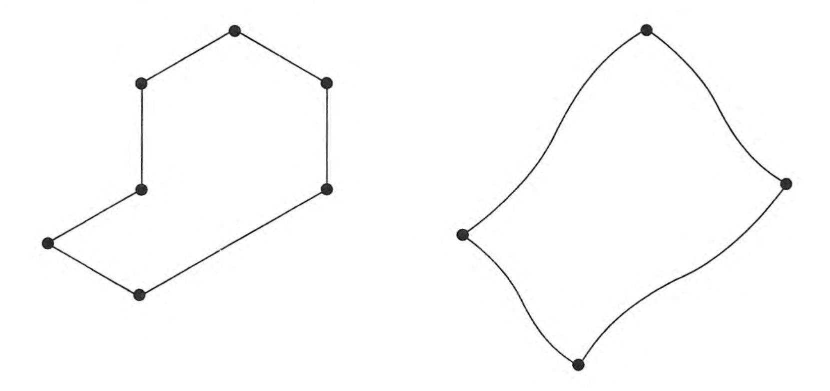


COMUNICACIÓN Y ERRORES

En 1956 Claude Shannon, fundador de la teoría de la información, abordó problemas de comunicación de mensajes a través de canales que podían distorsionar el contenido. También en este tipo de cuestiones se modeliza «el canal» como un grafo donde los vértices son los símbolos usados para componer el mensaje y las aristas unen los vértices que pueden confundirse durante la transmisión.

Grafos poligonales y completos

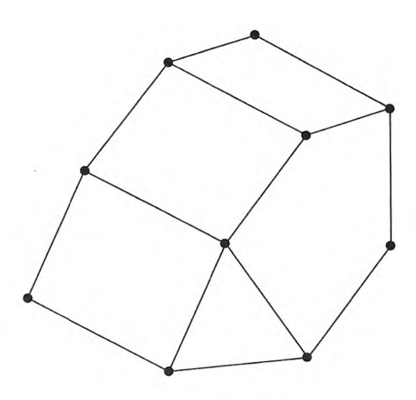
Los *ciclos* o *polígonos* son grafos extraordinariamente simples pues describen un recorrido por todos los vértices que empieza y acaba en un mismo lugar, como en el caso de las dos figuras siguientes.



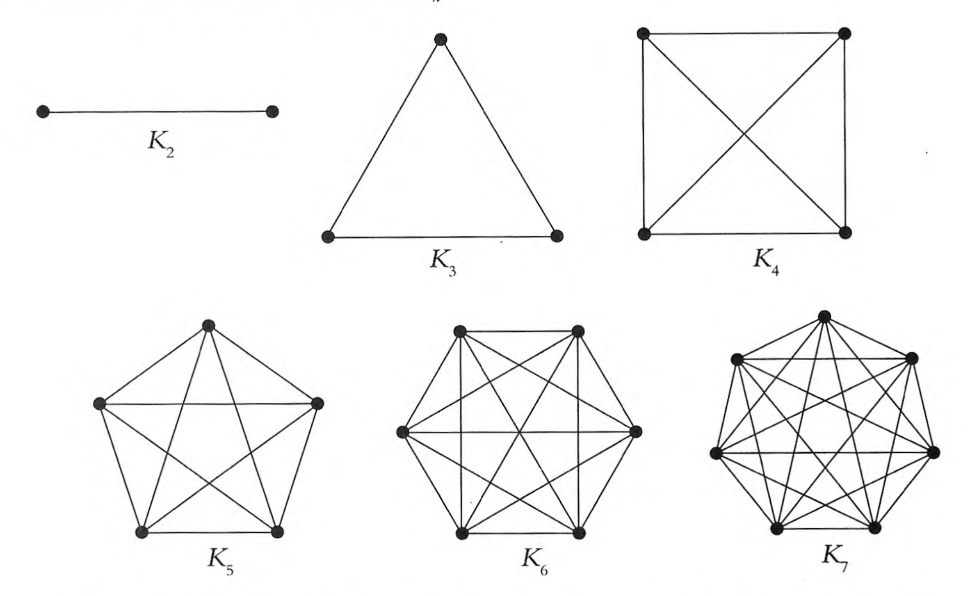
Rutas de autobuses urbanos o rondas serían representables por estos polígonos. El número de vértices V es igual al número de aristas A.

Por combinación de polígonos o ciclos se obtienen los *grafos poligonales,* en los cuales existe un número limitado de caras, unos vértices compartidos (salvo los de la frontera) y muchas aristas interiores en común, más otras aristas delimitando el exterior. El número total de vértices V y el número total de aristas A es fácil de contar.

Pero con respecto al número de caras C cabe remarcar que tanto se contabilizan las caras propias como «la cara exterior», pues esta zona también tiene, como las demás, un ciclo de vértices y aristas que la delimita. De este modo, por ejemplo, la figura siguiente tiene 10 V, 14 A y 6 C.



Los grafos en los que cualquier par de vértices está conectado por una arista se denominan *completos* o universales. Las figuras siguientes muestran ejemplos de los primeros grafos completos desde 2 hasta 7 vértices. Si el grafo completo tiene n vértices se designa con el símbolo K_n.



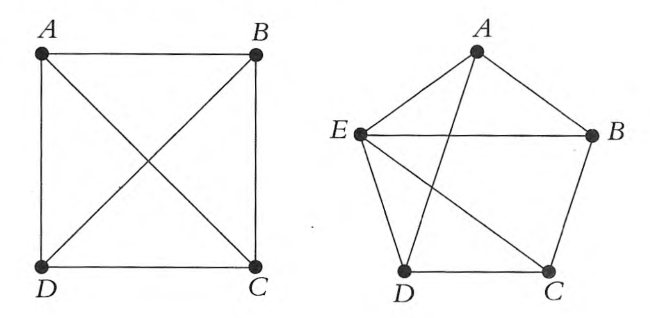
El número de aristas de un grafo completo K_n es muy fácil de contar: como cada vértice se debe unir con los otros $n-1$ y hay n en total si se multiplica $n \cdot (n-1)$ quedarán contadas todas las aristas dos veces (pues cada arista une dos vértices). Así que el número total de aristas será $n\,(n-1)/2$, lo cual es el número combinatorio $\binom{n}{2}$ de las combinaciones posibles de parejas elegibles de un conjunto de n elementos. Esta cantidad exhibe un crecimiento cuadrático en n, es decir, los K_n tienen muchas aristas.

EL TEOREMA DE TURÁN

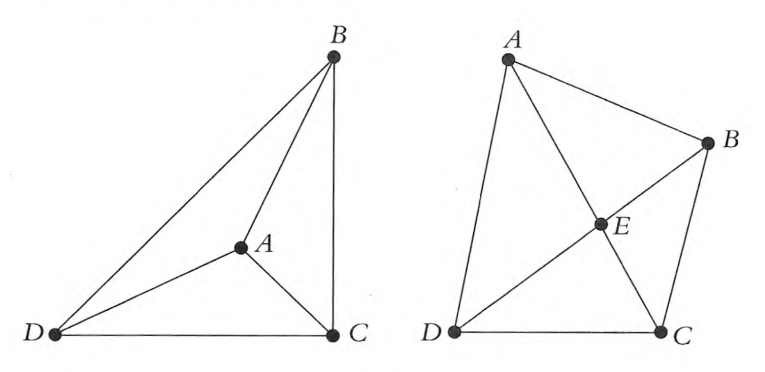
En 1941 Turán consideró el siguiente problema: supongamos que tenemos un grafo *G* simple con *n* vértices, dado un número *p* ($p \geqq 2$) consideramos una *p-camarilla* como un subgrafo completo de *G* con *p* vértices (es decir, un *Kp*). La cuestión es: si el grafo no contiene una *p-camarilla* ¿cuál es el número máximo de aristas que puede tener el grafo? La sorprendente respuesta es que el número de aristas no podrá superar el valor $n^2\ p/2\ (p-1)$. Dadas sus bellísimas demostraciones, este resultado ha pasado a ser todo un referente matemático en la teoría de grafos.

Grafos planos

Una vez dibujados los vértices de un grafo, al ir colocando las aristas pueden resultar dibujos como los de las figuras siguientes.



Sin embargo, se pueden redibujar estos grafos mejor, manteniendo las mismas características de enlaces pero con una representación más clara, en la que no aparezcan «cruces» de aristas en puntos que no son vértices, como en los dos casos anteriores y como muestran las figuras siguientes:



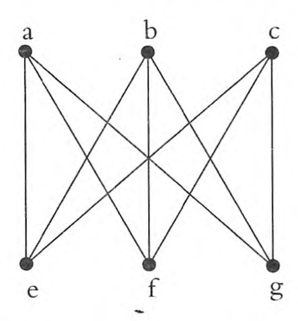
LA ELEGANCIA PLANA

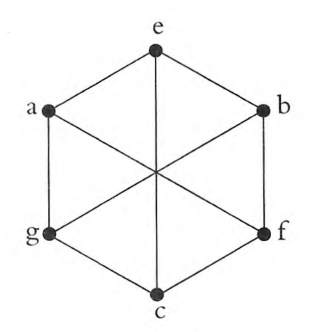
No debe pensarse que para dibujar bien un grafo plano se tienen que hacer aristas raras. Todo grafo plano admite una representación con las aristas dibujadas con segmentos rectos y que sólo se cruzan en dos vértices. Más elegancia imposible.

Un grafo se denomina *plano* si admite una representación en el plano donde las aristas sólo se crucen en los vértices. Nótese pues que para analizar la «planitud» de un grafo se debe buscar si uno equivalente (isomorfo) admite esta clara representación sin cruces indeseables. ¿No sería bonito que todos los grafos fuesen planos? Antes de buscar una respuesta, a continuación se propone reflexionar sobre el problema de grafos más famoso en matemática recreativa.

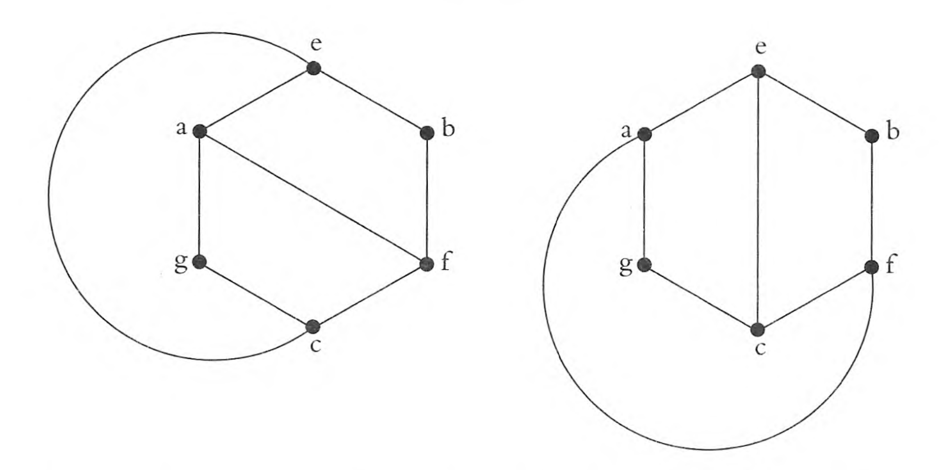
El problema de los pozos y las familias enemigas

El problema tiene el siguiente enunciado: en tres casas a, b, c habitan tres familias profundamente enemistadas entre sí. Enfrente hay tres pozos e, f, g de los cuales siempre hay uno lleno y dos vacíos. Las familias desean acceder desde su casa a cualquiera de los tres pozos, pero por caminos que nunca se crucen, para así evitar roces con sus vecinos. ¿Pueden hacerse estos nueve caminos?



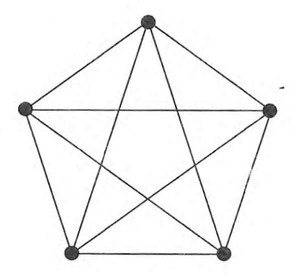


En la primera figura anterior se observa un primer intento de unir a, b y c con los pozos e, f y g. A este tipo de grafo de «tres contra tres» se le indica con el símbolo $K_{3,3}$. Esto llevaría a numerosos cruces indeseables (y peligrosos) de las familias enemigas. En la segunda figura se ha redibujado el mismo grafo de forma quizá más clara..., pero aún hay cruces. Obsérvese ahora que si desde b se quitara el acceso al pozo g, se podrían tener ocho caminos sin cruces, como muestran las dos figuras siguientes.



¿Puede añadirse la arista que falta sin cortar a las demás? Aquí es pertinente recordar un resultado muy intuitivo (aunque curiosamente de difícil demostración): si una curva continua, simple y plana divide el plano en dos regiones (interior y exterior), cualquier curva continua que una un punto de dentro y uno de fuera cortará al menos en un punto a la curva dada (teorema de Jordan). Mirando de nuevo las figuras anteriores se aprecia que en los dos esquemas g queda dentro de una curva cerrada continua y b en su exterior...; por lo tanto, no es posible resolver el problema de las familias y los pozos. La única opción para la familia b será edificar un puente en el espacio directo a g.

El problema de las familias y los pozos ofrece un primer ejemplo de grafo no plano, ya que el grafo que anteriormente se ha denominado como $K_{3,3}$ no es plano. Otro ejemplo simple de grafo no plano es el grafo completo K_5 de un pentágono con su estrella pentagonal dentro, tal y como muestra esta figura:



La cosa se complica por momentos. Si el $K_{3,3}$ y el K_5 no son planos, cualquier otro que los amplíe tampoco será plano, pues los dichosos cruces aún empeorarán la cuestión... Ya se dispone, de este modo, de infinitos ejemplos de grafos no planos.

KAZIMIERZ KURATOWSKI (1896-1980)

El profesor Kuratowski fue uno de los grandes matemáticos polacos, liderando grupos de investigación e interaccionando con grandes figuras mundiales. Trabajó en lógica, en topología, en teoría de conjuntos... y en 1930 sorprendió al mundo con su famoso teorema sobre los grafos planos. A pesar de la complejidad práctica para determinar la «planitud» de un grafo, el enunciado del teorema de Kuratowski es muy simple.



Pero una agradable sorpresa nos espera gracias a un resultado de Kuratowski. Nótese que dos grafos se llaman *homeomorfos* si suprimidos todos los vértices de grado dos son idénticos o isomorfos. El anunciado resultado es el teorema de Kuratowski, que dice así:

> «Un grafo es plano si y sólo si no contiene ningún subgrafo que sea homeomorfo al $K_{3,3}$ o al K_5».

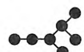
Para ver la planitud, se deben sacar todos los vértices de grado dos y entonces es suficiente observar que un $K_{3,3}$ o un K_5 no estén infiltrados.

UNA APLICACIÓN EN ARQUITECTURA

En proyectos de arquitectura tiene interés observar el grafo de accesibilidad entre espacios. Si este grafo no es plano deberán buscarse soluciones con varias plantas introduciendo escaleras. En el caso de «planitud» pueden trabajarse soluciones en planta.

Los árboles sí dejan ver el bosque

Un árbol es un grafo muy simple con todos los vértices conectados pero sin que haya ningún ciclo o polígono presente, como en la figura siguiente:



Así, en un árbol puede hacerse un paseo entre dos vértices cualesquiera.

A continuación figuran todos los árboles posibles desde 1 hasta 8 vértices.

$p = 1$

$p = 2$

$p = 3$

$p = 4$

$p = 5$

$p = 6$

$p = 7$

$p = 8$

Así va surgiendo la sucesión de números que cuenta árboles posibles: 1, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 47, 106, 235, 551, 1.301, 3.159...

Si hay p vértices entonces el árbol tiene siempre $p-1$ aristas, pero para cada valor de p se pueden dibujar p^{p-2} árboles distintos (fórmula de Cayley). Introducidos por Cayley en 1857 constituyen una clase muy importante de grafos pues conectan todos los vértices utilizando el menor número posible de aristas, lo cual los hace interesantes en multiplicidad de casos, como los circuitos eléctricos, las redes de telefonía, buscar carreteras conectando poblaciones, etc.

El siguiente teorema, bello y simple, da una caracterización de los árboles que es además crucial para sus aplicaciones:

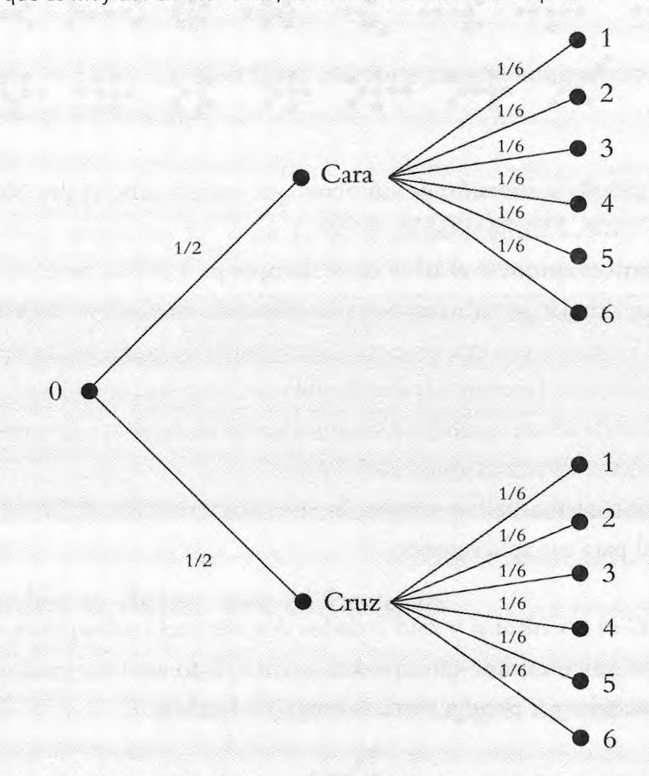
> Un grafo G es un árbol si y sólo si dados dos vértices cualesquiera, u y v de G, existe un único camino que conecta u con v. Esto equivale también a que G sea conectado y si tiene p vértices tenga $p-1$ aristas.

A pesar de este resultado tan simple nótese en los gráficos anteriores cómo crece, enormemente, con p el número de árboles posibles.

El argumento que justifica esto es el siguiente. Sea *G* un árbol. Dados dos vértices *u*, *v* de *G*, en virtud de la conexión de *G* existirá al menos un camino entre *u* y *v*. Si hubiese dos caminos C_1 y C_2 entre *u* y *v* se generaría un ciclo en *G*, lo cual es absurdo. Por supuesto, si existe un único camino entre dos vértices cualesquiera no podrán existir ciclos y existirá conexión.

ÁRBOLES Y PROBABILIDADES

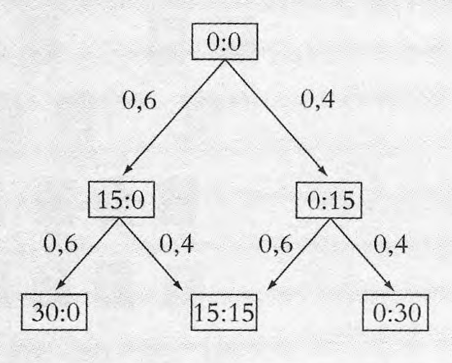
Al analizar muchas situaciones de probabilidad (juegos por ejemplo) es frecuente ordenar los diferentes sucesos alternativos y sus correspondientes probabilidades mediante un árbol donde los vértices corresponden a sucesos, y se colocan en las aristas de forma dirigida los valores de las probabilidades de que habiéndose dado el suceso de partida pueda ocurrir el de llegada. Y a partir del árbol se hacen las cuentas pertinentes. La figura adjunta muestra el árbol que correspondería al juego de tirar primero una moneda y luego un dado. En la teoría de juegos, que es muy útil en economía, se usan a menudo estas representaciones.



Calcular probabilidades exige claridad para plasmar todos los resultados posibles.

W. WINGFIELD & A.A. MARKOV: TENIS Y GRAFOS

W. Wingfield patentó un juego llamado *Tenis* en febrero del 1874. Por otra parte, A.A. Markov (1856-1922) consideró en teoría de la probabilidad lo que hoy se llaman *cadenas de Markov*, es decir, un grafo orientado cuyos vértices representan estados y en cuyos arcos se valoran transiciones de un estado a otro, dependiendo de las probabilidades del estado de partida pero no de toda la historia anterior. Wingfield y Markov han quedado unidos por la obra de L.E. Sadovskii y A.L. Sadovskii *Matemáticas y deporte*, en la que se usan cadenas de Markov para analizar juegos de tenis; así, por ejemplo, si se valoran con 0,6 y 0,4 las probabilidades de un jugador y otro en cada punto.



Planteémonos un problema resoluble con árboles: dadas n ciudades $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y conociendo todos los costes que se precisarían para establecer un servicio de conexión entre cada par de ciudades (carreteras, agua, luz, gas, teléfono, etc.), estudiar cuál es la red más barata que permita conectar todas las ciudades mediante este servicio. Evidentemente, la red de «conexión económica» deberá ser un árbol, pues se requiere de una conexión global y de la no existencia de ciclos (si existiera un ciclo, suprimiendo una de sus aristas se tendría la conexión realizada y a un coste menor).

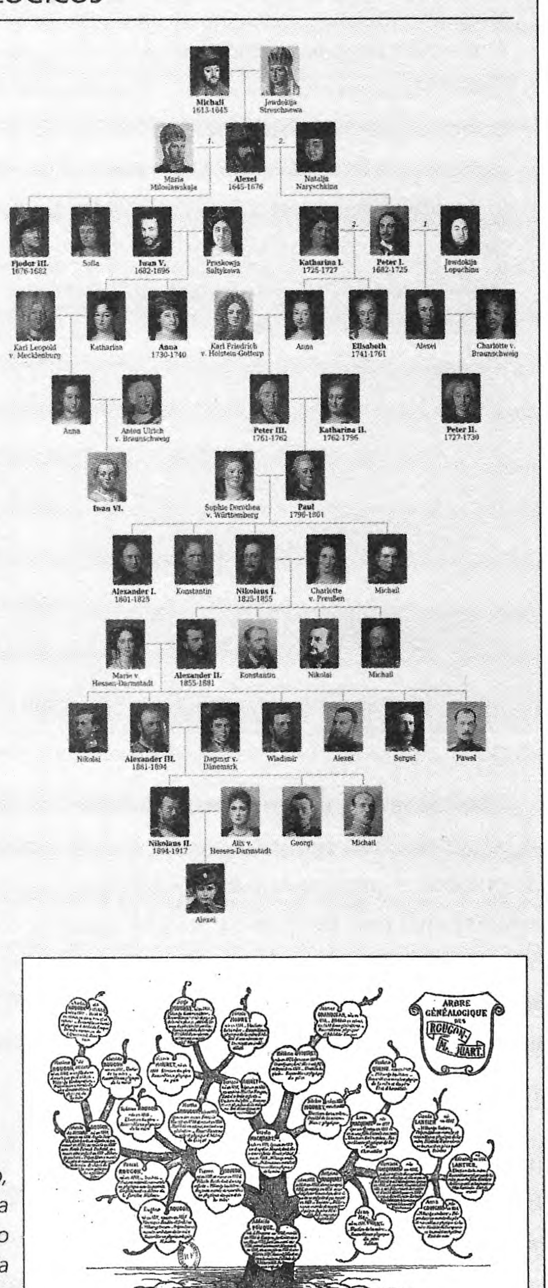
Por lo tanto, el árbol de conexiones entre las n ciudades tendrá $n-1$ aristas. Se trazará primero la conexión entre dos ciudades que tenga el mínimo coste posible. Luego se conectará a una de ellas una tercera cuyo coste de conexión sea mínimo y así sucesivamente.

¿Y cómo se denomina a un conjunto de distintos grafos que son árboles? Como ya se puede intuir reciben el nombre de *bosque*. En la teoría de grafos... los árboles sí dejan ver el bosque.

GRAFOS Y ÁRBOLES GENEALÓGICOS

Una forma clara y ordenada de visualizar los datos genealógicos de una familia o persona es representar a los familiares en un grafo en cuyos vértices se colocan fotografías, nombres y años de parientes directos, y mediante las aristas se indican las relaciones filiales. El árbol puede ser *descendiente* si ilustra todos los descendientes de una pareja o bien *ascendiente* si explicita todos los antepasados de un individuo.

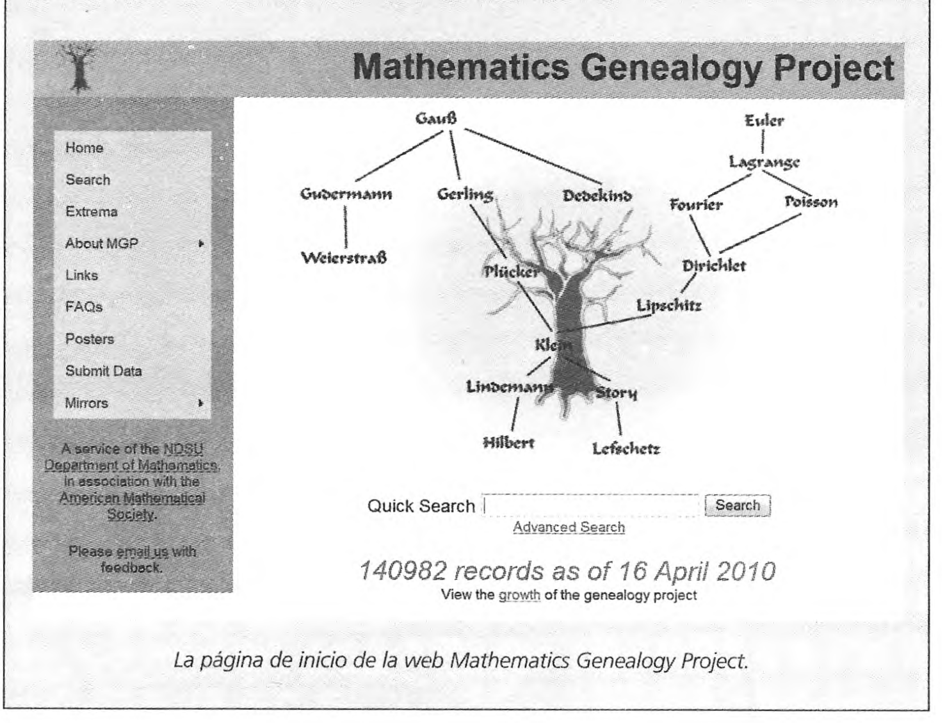
Si en el pasado se realizaban árboles genealógicos dibujando un árbol con ramas y distribuyendo en él a los diversos familiares, hoy en día la claridad de los grafos ha permitido representaciones más claras y menos pintorescas, muchas de ellas informatizadas (en diversas webs se pueden encontrar programas para representar los árboles genealógicos). Actualmente también se realizan árboles genealógicos dedicados al pedigrí de los perros, los caballos de carreras, los toros, los partidos políticos relacionados, los estilos musicales, los idiomas relacionados, etc.



Un moderno árbol genealógico, realizado por ordenador y dedicado a la familia Romanov, y uno elaborado en 1878, que se centra en una familia de ficción ideada por el escritor Emilio Zola, los Rougon-Macquart.

UN GRAFO DE FAMILIAS MATEMÁTICAS

En la web http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu se puede visitar el Mathematics Genealogy Project que da muchos datos sobre los matemáticos y sus «descendientes» intelectuales, es decir, personas que han hecho su tesis doctoral con el personaje correspondiente. Al mismo tiempo, se van incluyendo los doctorandos de estos doctorandos..., y así surge un árbol sobre las relaciones investigadoras de todos los matemáticos (en abril de 2010 ya hay 140.982 clasificados).



La página de inicio de la web Mathematics Genealogy Project.

Grafos en la vida cotidiana

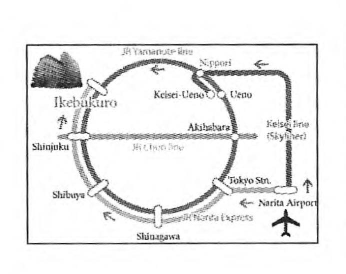
Al margen del árbol genealógico que a lo mejor ya tiene colgado en el comedor (o quizá se decide a hacerlo después de leer este capítulo), hay esquemas tipo grafo en informaciones de televisión en las que se dan valores por días o por años de accidentes, paro, cotización, etc. A lo mejor su reloj de pulsera es un grafo de 12 puntos y, por otra parte, diversas formas poligonales caracterizan sus cuadros, su vajilla, sus adornos, etc. El mundo de los GPS, de los mapas o el de los rutómetros de las webs de Internet ofrece magníficos ejemplos de grafos: las aristas son calles o carreteras, los

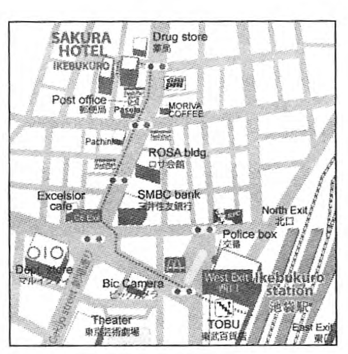
puntos, lugares o ciudades; los vértices del grafo tienen nombre, las aristas, números que indican kilómetros (grafo etiquetado ponderado).



Los mapas de carreteras, como éste de 1929, son un buen ejemplo de grafo.

A veces los grafos indicativos son aún más simplificados. En las figuras siguientes pueden verse dos nuevas informaciones visuales.

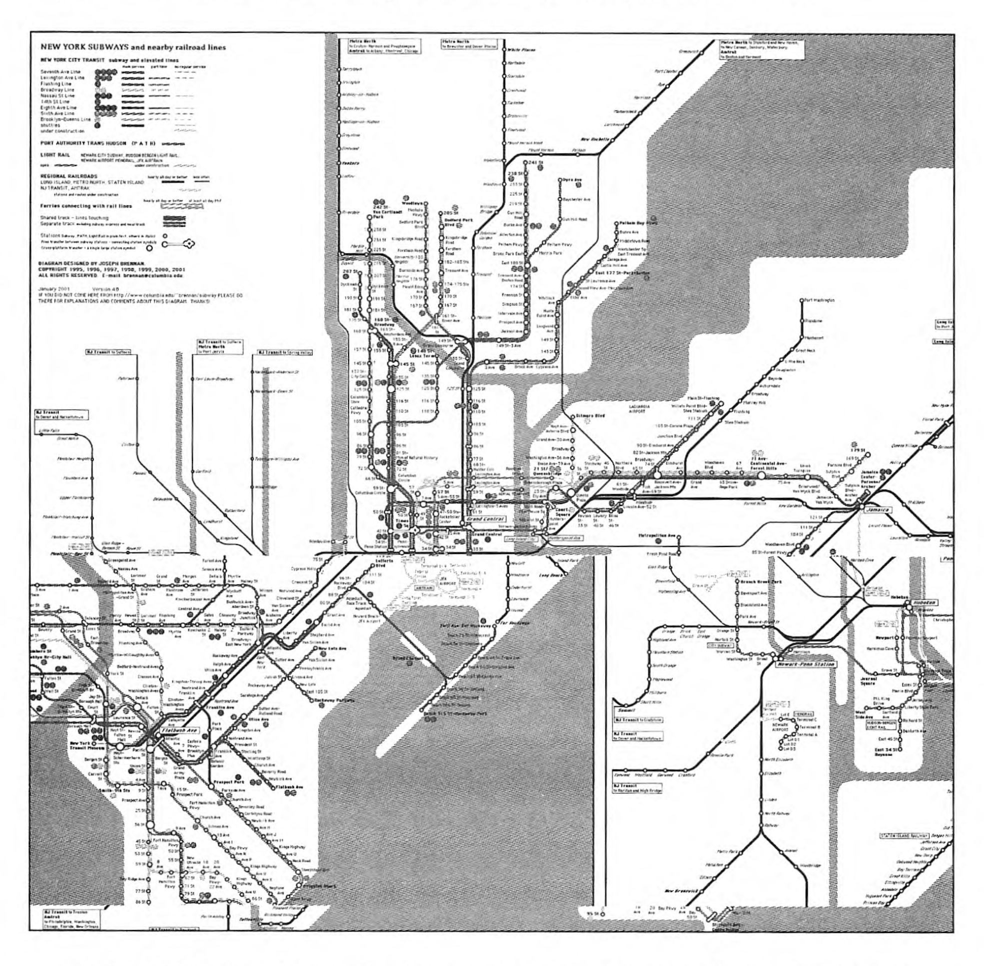




Un hotel de Tokio utiliza distintos grafos
para indicar cómo llegar a él desde el aeropuerto.

Es en el transporte donde los grafos nos dan la información ya bien organizada para facilitar nuestros trayectos. Los mismos grafos también sirven para planificar nuevas líneas o ampliaciones, nuevas estaciones, etc. El mapa del metro de Nueva York, por su parte, indica con nitidez líneas (con aristas coloreadas), estaciones y enlaces posibles, aunque esta forma de hacer grafos de metro tiene su inicio en el mapa de metro de Londres. En cambio, los grafos de las líneas aéreas, en los que desde un mismo punto (un aeropuerto) salen una multiplicidad de líneas (todos sus destinos), resultan mucho más complicados.

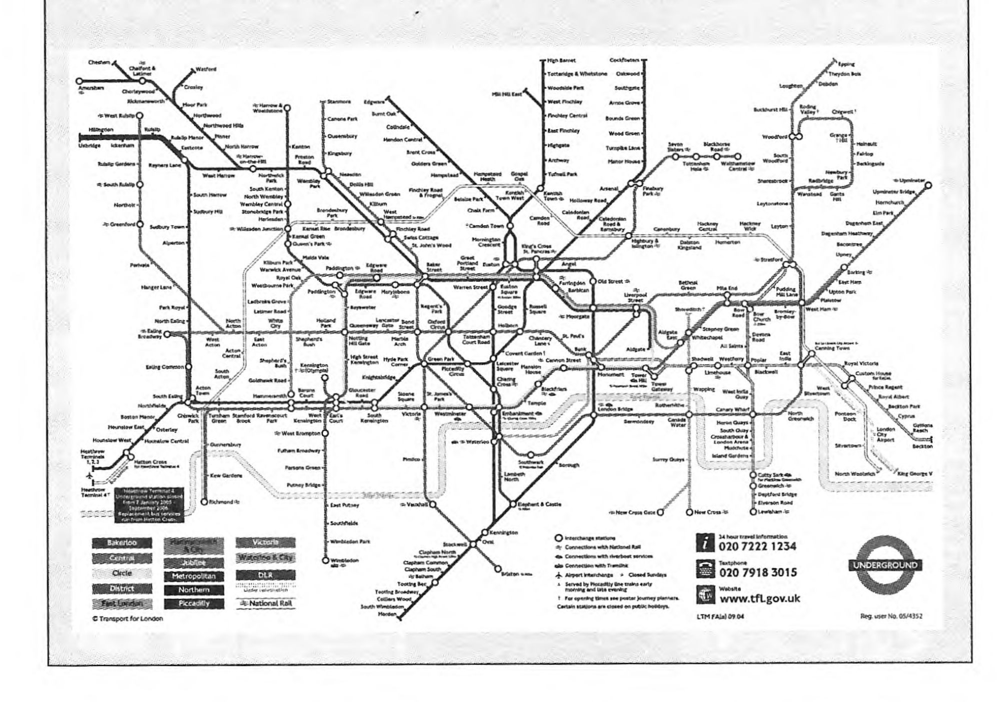
Los grafos de transporte precisan ser muy claros no sólo para indicar posibles trayectos, sino también las múltiples conexiones que pueden realizarse.



La simplicidad y la claridad son fundamentales a la hora de trazar grafos como el del plano del metro de Nueva York, un servicio que da cabida diariamente a millones de pasajeros.

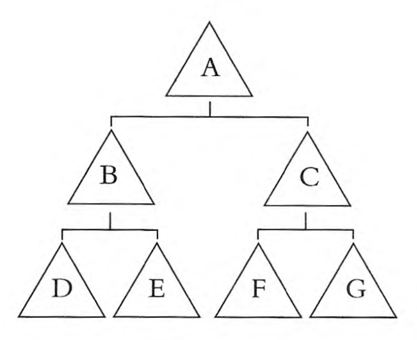
EL GRAFO DEL METRO DE LONDRES

A partir de 1909 el director comercial del metro de Londres, Frank Pick, que tenía la responsabilidad del grafismo de la compañía, comprobó la necesidad de ir encargando sucesivamente a diversos diseñadores propuestas de mapas de metro que ayudaran a los viajeros a moverse en un sistema de líneas cada vez más complejo. Muchos diseñadores fracasaron, pues sus mapas partían de la localización en la ciudad de las diversas estaciones, causando gran confusión entre los usuarios sobre la línea (o líneas) entre las que podían escoger. Al final lo resolvió todo Henry Beck (1903-1974) ingeniero y diseñador. La genialidad de Beck fue simplificar los trazados, quedarse con la «esencia» del grafo de líneas y comunicaciones sobre una malla octogonal. Situó las líneas y estaciones de forma que (si era necesario) se formaran ángulos de 90° o de 45° dando mayor claridad visual..., la cual remató pintando sólo el río Támesis como referencia externa.

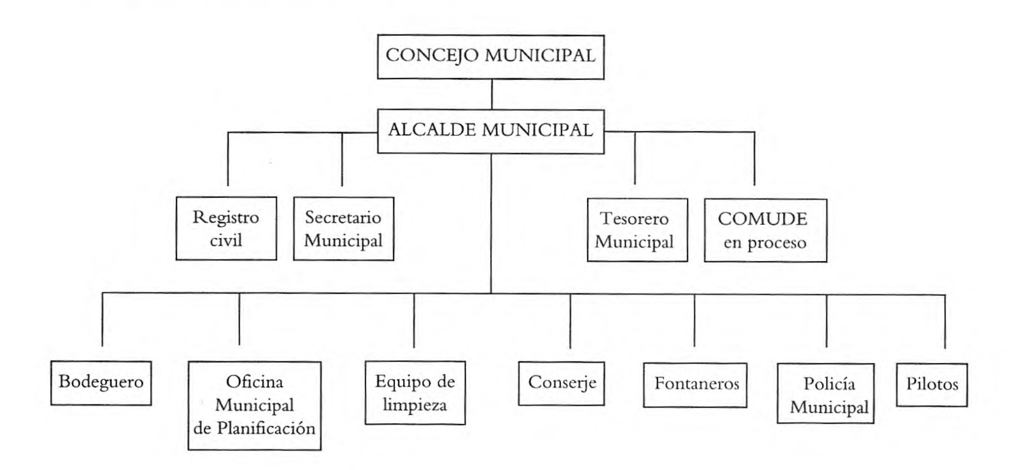


Muchos son los esquemas organizativos o jerárquicos –del tipo que aparece en la figura siguiente– que están presentes hoy en día en producciones, empresas o instituciones.

Los organigramas aclaran dependencias, posibles itinerarios, alternativas que se pueden considerar, algoritmos que deben seguirse... ¡Orden y claridad!



A menudo el análisis de estos organigramas –como el de un concejo municipal mostrado por la figura inferior– aclara muy bien las dependencias y las situaciones problemáticas. El ejemplo corresponde a una organización real en un pueblo latinoamericano, donde el omnipotente alcalde debe encargarse incluso de un bodeguero y de los fontaneros del ayuntamiento.

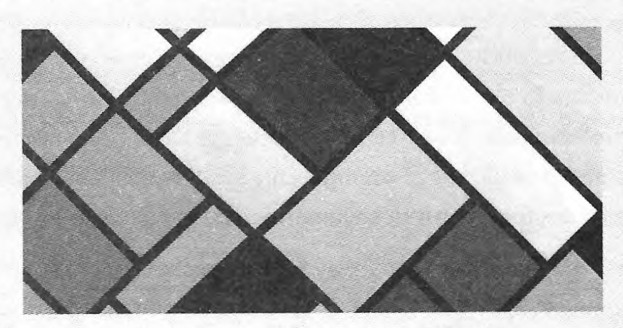


Si usted va a realizar un viaje puede hacer un grafo organizándolo con tiempos, costes, enlaces, esperas... E incluso si se sienta en su sofá a leer *La isla del tesoro* verá como es un grafo el que indica dónde se esconde el preciado botín.

En los siguientes capítulos de este libro se podrá observar como los grafos son útiles en telecomunicaciones, en Internet, para planificar costos, limpiezas, repartos, recogidas, urbanizaciones, distribuciones interiores de casas... Son grafos hechos por profesionales que repercuten en su calidad de vida (calles más limpias, correo más rápido, basuras eliminadas, casas más confortables, ciudades más habitables...). Si no es así, ¡reclame!

GRAFOS Y ARTE

Con el nacimiento del arte abstracto, los pintores y escultores se van alejando de las representaciones de personas, objetos o paisajes para interesarse por el análisis de formas y colores, correspondientes a relaciones formales abstractas. Del ideal renacentista del cuadro como ventana donde «ver» el mundo real a la idea surrealista de que «es quien mira quien hace el cuadro» hay todo un cambio de paradigma. A partir de los influyentes escritos y cuadros de, por ejemplo, Vasili Kandinski (1866-1944) o Theo van Doesburg (1883-1931) las formas geométricas más puras y los colores más básicos fueron ganando fuerza en un arte que crea emociones y belleza sin necesidad de ser reflejo de realidades. Puntos y líneas (¡grafos!) se convierten así en elementos clave de la representación artística.



Contra composición con disonancias XVI, de Theo van Doesburg.

Capítulo 2

Grafos y colores

Illinois es verde, Indiana rosa…
Yo mismo lo he mirado en el mapa, y es toda de color rosa…
Mark Twain

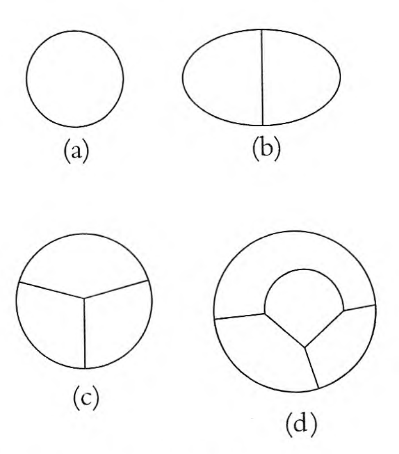
Este apartado invita al lector a visitar un problema muy concreto y aparentemente ingenuo de la teoría de grafos: el de la coloración de mapas. Pero con él descubrirá cómo un reto intelectual recreativo puede a veces dar lugar a grandes avances del conocimiento.

Mapas y colores

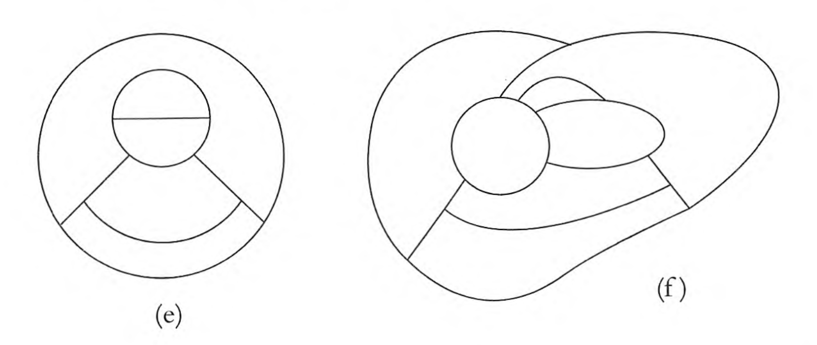
La mayoría de los mapas geográficos pueden interpretarse como grafos en lo que los vértices son los puntos de confluencia de tres o más líneas y las aristas son las líneas delimitantes de cada territorio o zona. Un problema de los elaboradores de mapas ha sido intentar colorearlos siguiendo el criterio de que países o zonas diferentes deben tener colores distintos. Dada la cantidad de países o zonas y la reducida gama de colores que se usan en la impresión a color, el criterio debió modificarse y exigir tan sólo que países con frontera común tuviesen coloración diferente. Aparece entonces, de forma natural, la cuestión: dado un mapa cualquiera ¿cuál es la mínima cantidad de colores necesaria para colorearlo de forma que zonas con frontera común tengan colores diferentes? (se entiende que la frontera no debe reducirse a un único punto). Como los mapas posibles son muy diversos (países, regiones, zonas industrializadas, zonas artísticas, etc.) está claro que este problema debe formularse en el contexto general de los grafos, es decir, se tiene que considerar el mapa que describe cualquier grafo poligonal.

Para empezar observemos las siguientes figuras. Cada una de ellas precisa, para ser coloreada (siguiendo las reglas del juego), exactamente de 1, 2, 3 y 4 colores respectivamente.

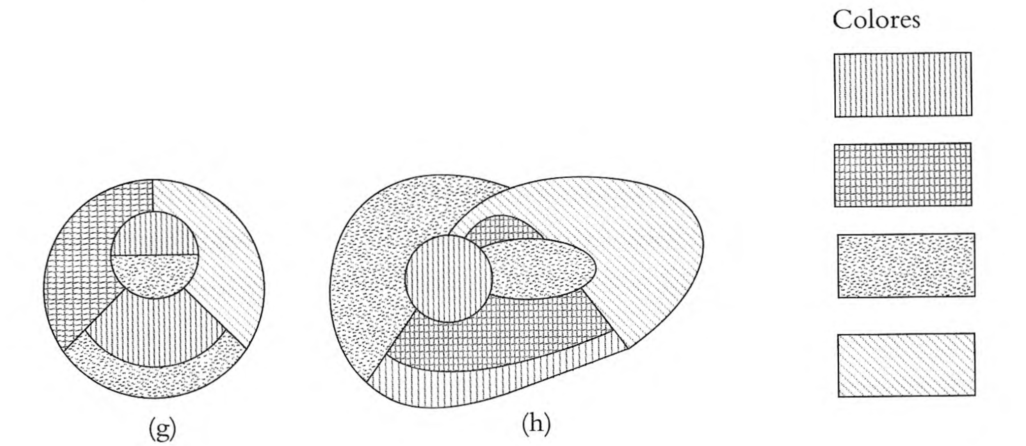
Adviértase que si también desea colorear la zona exterior, necesita 2, 3, 4 y… 4 colores.



Observemos ahora dos figuras más complejas.



Un sencillo intento de coloración pone de manifiesto que cuatro colores son suficientes.



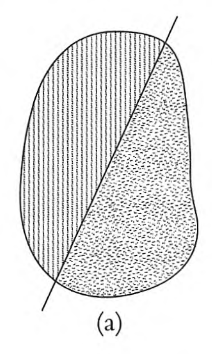
Nótese que en ambos casos también con uno de los cuatro colores (¿cuál?) podría colorearse la cara externa o del infinito de los mapas. Por supuesto, el problema de coloración no depende de la representación isomorfa que pueda hacerse de un grafo.

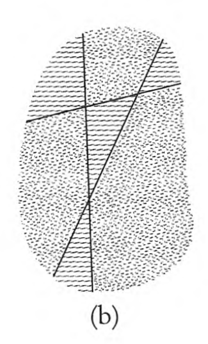
Grafos coloreables con 2 o 3 colores

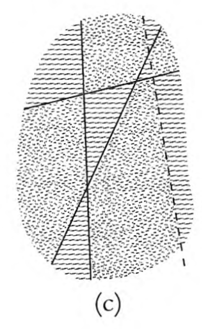
¿Cómo deben ser los mapas (los grafos poligonales) que son coloreables con tan sólo 2 colores? ¿Y con 3 colores? Estas cuestiones no presentan mayor dificultad y pueden ser descritas brevemente. A continuación se verá en primer lugar el teorema de los dos colores, que dice lo siguiente:

> Un mapa es coloreable con dos colores si y sólo si su grafo asociado tiene todos sus vértices con grado par y mayor o igual que dos.

Curiosamente, si el mapa se colorea con dos colores los vértices de su grafo tienen grado par, pues si hubiese un vértice con grado impar al menos una cara lindaría como mínimo con dos caras más y, por lo tanto, se precisarían tres colores. Para establecer el recíproco, deben considerarse varios pasos. En primer lugar, si se «tiran» n líneas rectas al azar sobre un plano, se demostrará que son suficientes dos colores para colorear el mapa lineal resultante (¡acuérdese del tablero de ajedrez!). Para ello se utilizará el método de demostración por inducción, que consiste en probar el primer caso $n = 1$ y ver que si algo vale para un valor n también valdrá para el siguiente valor $n + 1$.


(a)

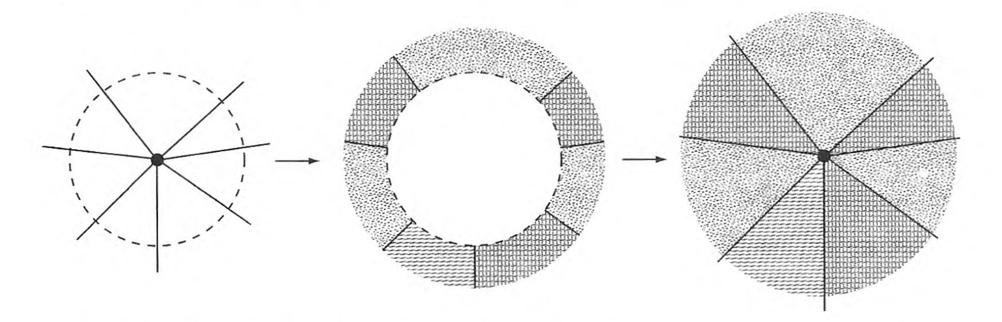

(b)


(c)

Para $n = 1$ una recta (a) el resultado es trivial. Supongamos que el resultado vale para n rectas (b) y nos centramos en el mapa correspondiente a $n + 1$ rectas (c). Suprimiendo una de las rectas queda un mapa con n rectas, coloreable a dos colores (inductivamente) y entonces, al añadir la recta $n + 1$, se dejan los mismos colores

en las regiones por encima (o a la derecha) de la recta añadida y se cambia uno por otro en las regiones del otro lado. Entonces se tiene el caso $n + 1$ cubierto con sólo dos colores. El lector puede justificar *mutatis mutandi* que también todo mapa determinado por n circunferencias distribuidas al azar en un plano es coloreable con dos colores. Nótese que, tanto en el caso de rectas como en el de circunferencias, el grafo resultante tiene vértices con grado par. En cualquier grafo con vértices de grado par superior al dos, al suprimir un ciclo o una cadena, el grafo resultante sigue teniendo vértices de grado par, y como todo grafo de este tipo admitirá una representación isomorfa formada por rectas y círculos. El resultado de los dos colores queda aclarado.

Respecto de la coloración, en muchas ocasiones sólo interesa considerar los grafos con grado a lo sumo 3 en cada vértice: si hubiese un vértice V con grado mayor que 3, trazando un círculo C de centro V que no corte a ningún otro vértice, al suprimir los trazos del interior del círculo aparecería un nuevo grafo con vértices de grado 3 correspondientes a las intersecciones de C con las aristas primitivas. Si se colorea entonces este mapa, al suprimir el círculo y volver al grafo inicial, el problema estará resuelto, tal y como muestran las figuras siguientes. De este modo, a efectos de coloración, a veces nos podemos restringir a considerar grafos poligonales con grado 3 en cada vértice.



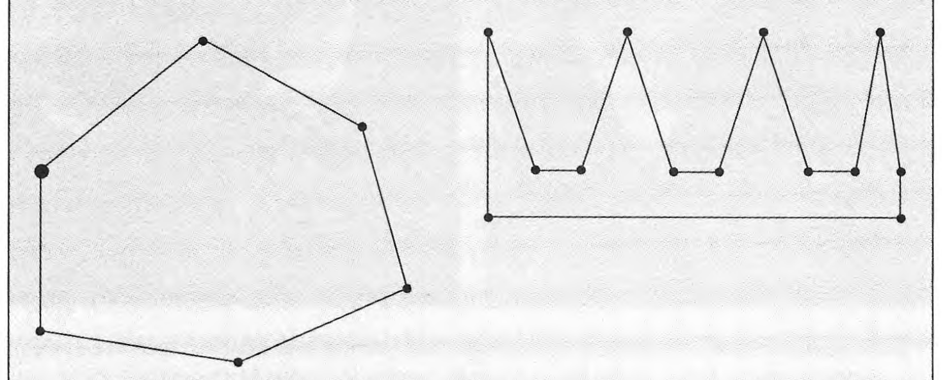
El teorema de los tres colores, que requiere una justificación más complicada que aquí se omite, dice lo siguiente:

> Un grafo poligonal (con vértices de grado 3) es coloreable con tres colores si y sólo si cada cara está limitada por un número par de aristas.

Conocidos los grafos coloreables con 2 o 3 colores y habiéndose pronto visto que 5 colores eran suficientes, fue un gran reto solucionar el tema de los 4 colores. Ha ocurrido muchas veces: un caso concreto puede ser el más difícil.

GUARDAS EN MUSEOS Y COLORACIÓN DE GRAFOS

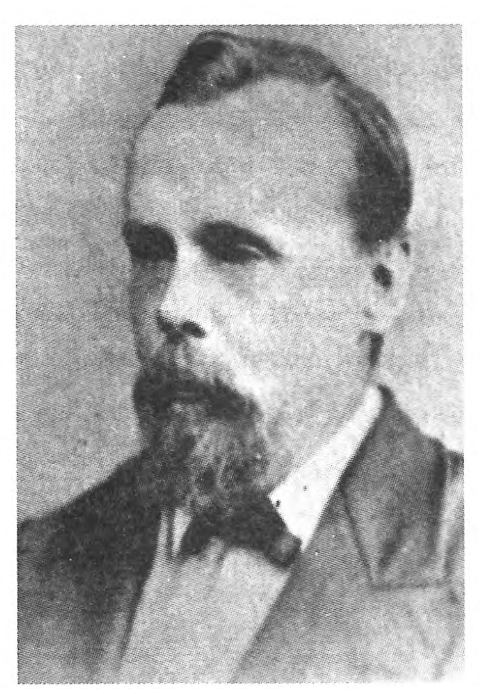
La cuestión de distribuir bien a los guardas en las salas de un museo inspiró a Victor Klee en 1973 el problema especulativo siguiente: si se tiene una planta de museo en forma poligonal con *n* paredes y se quieren colocar guardas que «vean» todas las paredes sin moverse, ¿cuántos se necesitan? En la primera figura puede verse un polígono convexo muy fácil de vigilar con un guarda en una esquina, pero un polígono cóncavo, como el de la figura siguiente, exige muchos más. El resultado es que si hay *n* paredes es suficiente colocar estratégicamente [*n* / 3] (donde [ ] indica parte entera de la división, es decir, dividir y suprimir decimales).

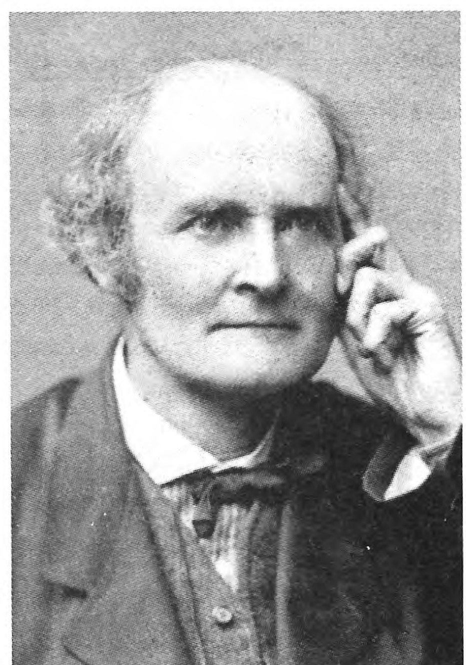


Lo curioso del tema es que el anterior resultado se justifica viendo que el grafo formado por la triangularización de la sala asociada a los vértices (trace las diagonales convenientes entre ellas) es un grafo cuyos vértices se pueden colorear con tres colores de forma que vértices adyacentes tengan colores distintos.

Cuatro colores son suficientes

En 1852 Francis Guthrie, observando mapas, tuvo la intuición de que era posible colorearlos con cuatro colores de forma que zonas con frontera común tuvieran colores diferentes. Como Francis ya había acabado sus estudios universitarios le mandó una nota sobre esta curiosa cuestión a su hermano Frederick, que por aquel entonces seguía un curso de matemáticas con el reconocido profesor Augustus de Morgan. No sabiendo dar una respuesta, De Morgan explicó el problema a otros colegas, como Sir William Hamilton. En 1878 Arthur Cayley presentó formalmente este reto a la London Mathematical Society, quedando así el problema abierto a la consideración de todos.





Los matemáticos Francis Guthrie (a la izquierda), quien planteó la posibilidad de los mapas de cuatro colores, y Arthur Cayley, quien presentó el reto a la London Mathematical Society.

En 1879 se publicó un artículo demostrando que, en efecto, cuatro colores eran suficientes. La ingeniosa explicación se debía a Arthur B. Kempe, que era un abogado de Londres. Entre 1879 y 1890 (¡once años!) la solución de Kempe se dio como buena y, por lo tanto, el problema de los cuatro colores se consideró resuelto.

La sorpresa surgió en 1890 cuando P.J. Heawood puso en evidencia un fallo (no resoluble) en la solución de Kempe, de modo que de nuevo el problema quedaba pendiente de solución. El propio Heawood y muchísimos otros dedicaron entonces muchos años y muchos esfuerzos a intentar probar la certeza del resultado. Nadie pudo encontrar nunca un mapa que necesitara como mínimo cinco colores... Por lo tanto, era lógico apostar por la validez de que con cuatro colores debía de ser suficiente. Como siempre ocurre en matemáticas, la ventaja de atacar un problema no resuelto lleva al desarrollo de muchos otros resultados que aunque no resuelvan el reto inicial sí sirven en otros campos (geometría, topología, combinatoria...).

Curiosamente, en mapas situados sobre superficies más raras que un plano o una esfera, sí que se pudo demostrar cuántos colores eran suficientes. Así, por ejemplo, en un toro –que tiene forma de rosquilla o neumático– se necesitan siete colores y en

DENES KÖNIG (1884-1944)

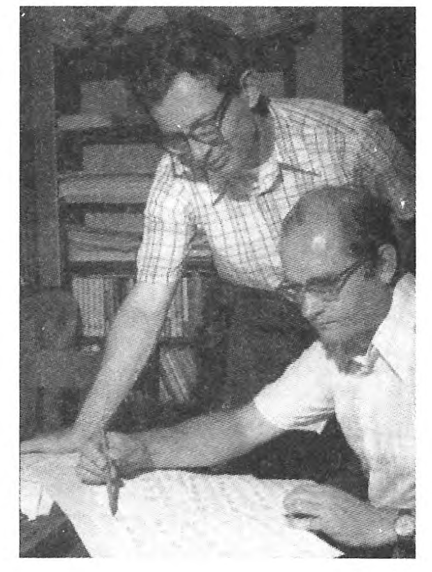
El matemático húngaro Denes König estudió en Budapest y Göttingen. Fue en la última localidad donde quedó fascinado por las conferencias de Minkowski sobre el problema de los cuatro colores. König decidió dedicar toda su vida investigadora y docente a la teoría de grafos, escribiendo un tratado sobre grafos en 1936 que ayudó muchísimo a popularizar el tema en todo el mundo. No pudo resolver el problema de los cuatro colores... pero resolvió muchos otros.

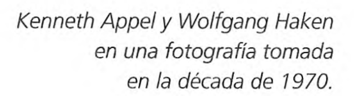
una cinta de Möbius (que surge al unir, dando media vuelta, los lados cortos de un rectángulo largo) se necesitan seis colores. También se dio una demostración correcta de que cinco colores eran suficientes y se caracterizaron los mapas coloreables con dos o tres colores... Pero el caso de los cuatro colores en mapas (del plano o de la esfera) seguía aguardando solución. ¡Y larga fue la espera!

A partir de 1950 ya se pudo ver que mapas con menos de 36 países se podían colorear con cuatro colores. El alemán Heinrich Heesch, siguiendo las ideas de Kempe, intuyó que las nuevas potencialidades de los ordenadores quizá podrían ayudar a atacar este problema en el que el hecho de considerar «cualquier mapa» lleva a distinguir muchísimas configuraciones posibles.

Entre 1970 y 1976 los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign lograron, con la ayuda de un computador y distinguiendo miles de casos, dar la buena nueva: «Cuatro colores son suficientes». El acontecimiento fue tan celebrado que el servicio postal de Estados Unidos hasta realizó un diseño para estampar sellos de cartas con esa misma frase.

Si bien se han dado presentaciones más refinadas del resultado de Appel y Haken, nadie hasta el momento ha logrado eludir la intrincada enumeración de casos, es decir, encontrar argumentos que sin ayudas com-

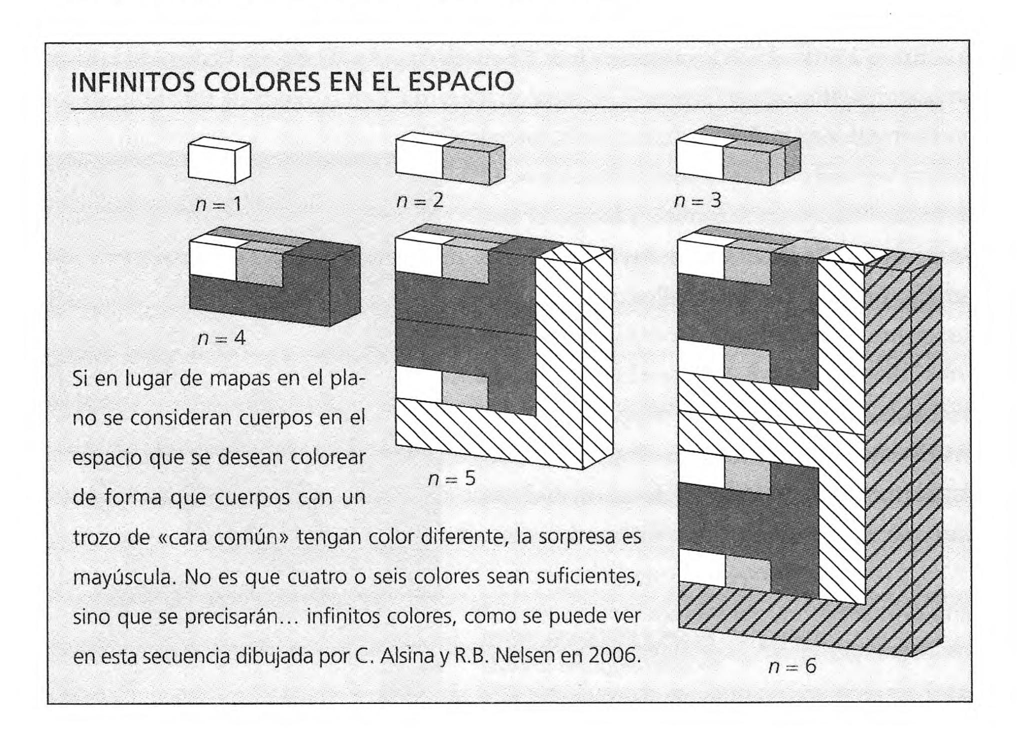



Kenneth Appel y Wolfgang Haken en una fotografía tomada en la década de 1970.

putacionales resolvieran la cuestión. Esta inclusión de las ciencias de la computación en demostraciones matemáticas (más allá de los colores) ha abierto un nuevo paradigma en el mundo de las demostraciones matemáticas clásicas. En 1997 Robertson, Sanders, Seymour y Thomas lograron una actualización de esta demostración usando tanto viejas ideas como nuevos recursos computacionales. Sin embargo, una demostración «clásica» sigue aún pendiente.

Posteriormente, han surgido nuevos problemas de coloración. Por ejemplo, Herbert Taylor ha sugerido generalizar el problema de los cuatro colores de la forma siguiente: ¿cuántos colores son imprescindibles para colorear un mapa en el que cada país o zonas a colorear está formado por m partes desconectadas, suponiendo que todos los territorios de un mismo país hayan de ser del mismo color y las regiones del mismo color no compartan frontera común? Cuando $m = 1$ se recupera el problema de los cuatro colores. Heawood demostró en 1980 que para $m = 2$ se precisan *12 colores*. Para $m = 3$, H. Taylor ha demostrado la necesidad de *18 colores* y para $m = 4$ se precisan *24 colores*. Para $m \geq 5$ existe la conjetura de que 6 m serán suficientes colores, pero este problema aún está abierto. Otros problemas diversos sobre coloración de mapas constituyen hoy un *corpus* doctrinal de la teoría de grafos que sigue acaparando el interés de los investigadores.

INFINITOS COLORES EN EL ESPACIO



Si en lugar de mapas en el plano se consideran cuerpos en el espacio que se desean colorear de forma que cuerpos con un trozo de «cara común» tengan color diferente, la sorpresa es mayúscula. No es que cuatro o seis colores sean suficientes, sino que se precisarán... infinitos colores, como se puede ver en esta secuencia dibujada por C. Alsina y R.B. Nelsen en 2006.

UN PROBLEMA PLANTEADO POR PAUL ERDÖS

¿Cuál es el número mínimo de colores que se precisan para colorear un plano de manera que cualquier par de puntos distantes una unidad se encuentren en regiones de diferente color? Leo Moser verificó que cuatro seguro que se necesitan… ¿son suficientes?

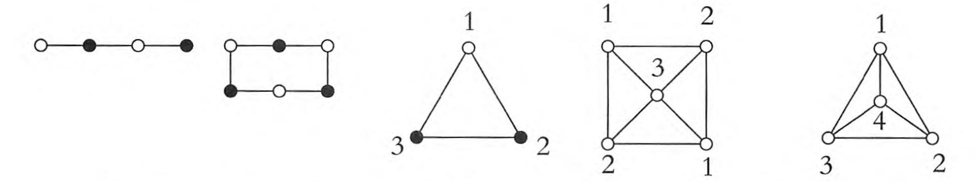
El número cromático

De la misma manera que se ha considerado la coloración de caras de los grafos, se puede considerar la coloración de aristas o de vértices.

Una *coloración* de los vértices $V(G)$ de un grafo G, dado un conjunto de colores C, consiste en asignar a cada vértice un color de C de forma que vértices conectados por una arista reciban colores diferentes. En este contexto, se define el *número cromático* del grafo G como $X(G)$: el mínimo número de colores necesarios para colorear G siguiendo esta restricción de vértices adyacentes con colores distintos.

Si G tiene al menos una arista debe ser $X(G)$ mayor o igual que 2 y, evidentemente, $X(G)$ no podrá superar nunca el número de vértices V (sería un caso extremo pintar cada vértice con un color distinto). Por supuesto, el número cromático es un invariante dado que grafos totalmente equivalentes (isomorfos) tienen el mismo número cromático.

Observe ahora los cinco grafos siguientes:



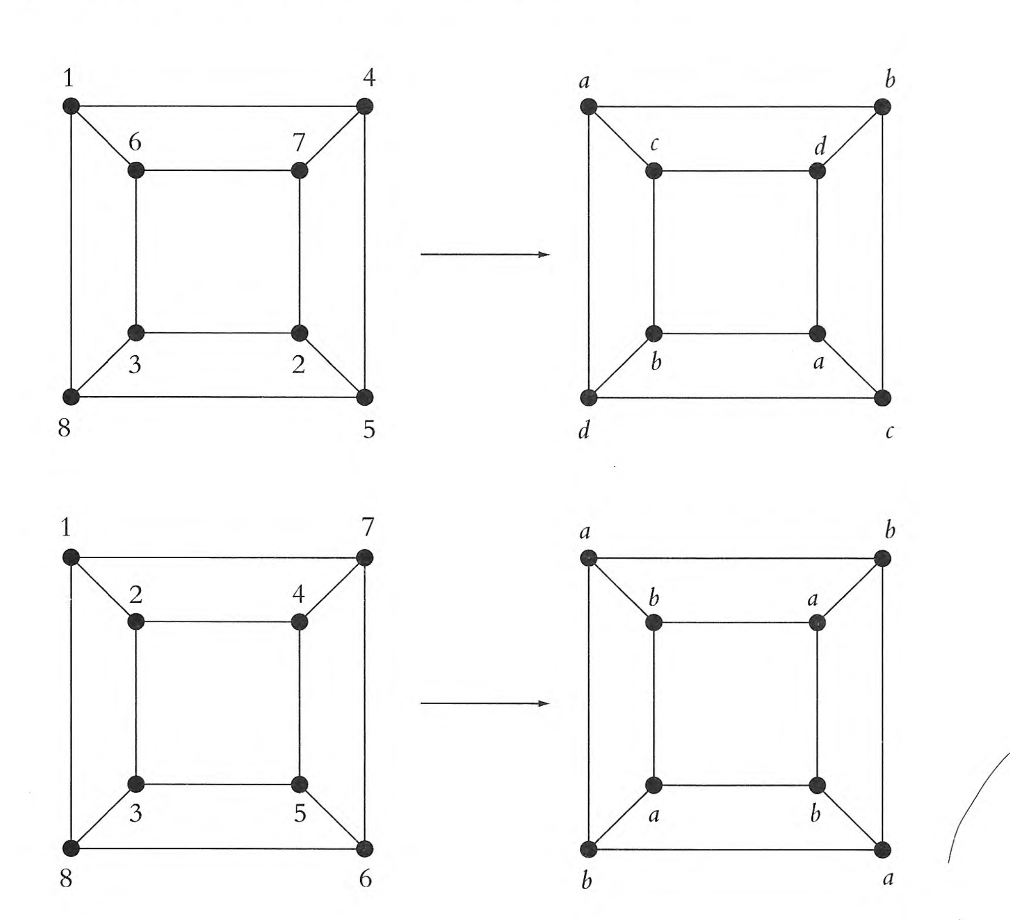
En el caso de los n vértices alineados el número cromático será 2; basta alternar colores. Esto también será verdad en cualquier árbol. En el caso de un ciclo puede apreciarse que si hay un número par de vértices el número cromático es 2, pero si hay un número impar de vértices el cromático debe valer 3. Finalmente, en el caso de las ruedas el número cromático es 3 si en el ciclo exterior hay un número par de vértices y 4 si este número es impar.

Mediante el concepto de «dualidad» puede pasarse de un tipo de grafo a otro y usarse temas de colores en caras en temas cromáticos de vértices.

Lo interesante es que en lugar de colores pueden tenerse determinadas categorías lingüísticas o atributos y que los diferentes grupos de vértices de igual color o categoría forman una clasificación. Esto ocurre en las elaboraciones de listas.

Para colorear los vértices de los grafos se sigue normalmente el *algoritmo austero*, que consiste en ordenar los vértices enumerándolos, asignar un primer color al primero de la lista, luego dar color al segundo (si es adyacente al primero se deberá cambiar de color y si no lo es, repetir tonalidad), y así sucesivamente. Pero mucho cuidado, porque este algoritmo no necesariamente lleva al número cromático y, por lo tanto, se impondrá una revisión para lograr minimizar realmente el número de colores.

En las figuras siguientes puede apreciarse el caso de un grafo correspondiente a un cubo en el que se ha logrado pasar de la coloración de 4 colores resultante de aplicar el algoritmo a una bella solución con tan sólo 2 colores.



De hecho, el algoritmo austero lo único que puede asegurar en cuanto a coloración es que como máximo se usarán el máximo de los grados de los vértices más uno. Hallar algoritmos eficientes de coloración no es, ni mucho menos, un problema trivial.

Este capítulo ha permitido ver algo frecuente en matemáticas: un reto que empieza como un juego puede ser muy estimulante.

COLORES, GRAFOS Y POEMAS

En ocasiones la inspiración poética queda arruinada por los acontecimientos posteriores a la composición de la rima. Éste fue el caso del poeta inglés J.A. Lendon que, sorprendido por la afición de muchas personas por intentar probar la suficiencia de cuatro colores para colorear los grafos, realizó el siguiente poema:

Cuatro colores usan los matemáticos de emblema
ansiosamente regiones colocando
deseando obtener el teorema
donde siguen sin remedio fracasando.

La historia ha quitado todo valor a los versos. Costó tiempo y esfuerzos, pero el teorema de los cuatro colores ahí está.

Capítulo 3

Grafos, circuitos y optimización

Quiero conseguir que aterrice un hombre en la Luna y que vuelva sano y salvo a la Tierra, y que se lleve a cabo dentro de esta década.
John F. Kennedy, 25 de mayo de 1961

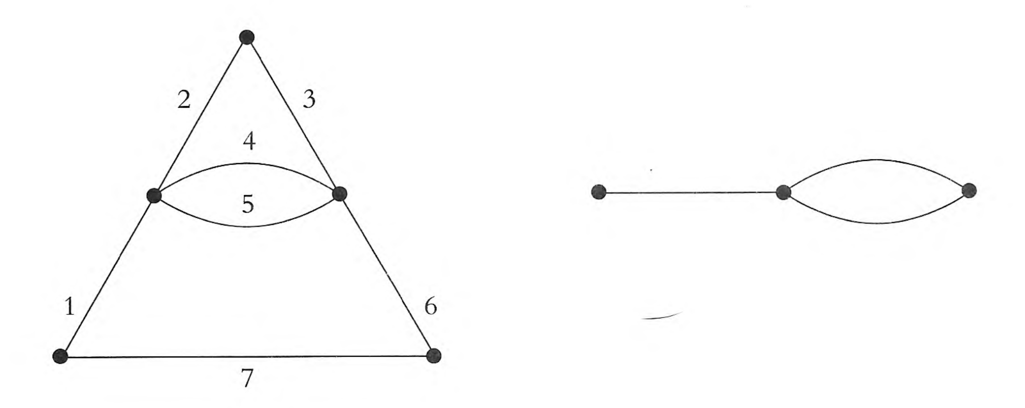
Dios mío, ahora sí que lo tenemos que hacer de verdad.
Robert F. Freitag (NASA)

En la segunda mitad del siglo XX la teoría de grafos, al margen de tener un espectacular desarrollo matemático, adquirió una nueva dimensión al formar parte de muchas aplicaciones relacionadas con la planificación y la optimización. A este desarrollo se unieron los avances tecnológicos y el floreciente campo de las ciencias de la computación, pero nunca como entonces la idea de lograr soluciones óptimas, en tiempo o en costes, había suscitado tal búsqueda de métodos y algoritmos eficientes. El gran programa de la NASA para el lanzamiento del Apolo II, la recogida de basuras y la limpieza en grandes ciudades, las cadenas productivas y de distribución de coches o de alimentos, buscaron métodos convenientes para proponer buenas soluciones. La investigación operativa brilló con esplendor y la teoría de grafos suscitó un interés que aún sigue vigente. Este capítulo le invita a apreciar las potencialidades de esta teoría en problemas prácticos de optimización.

Circuitos eulerianos

Dado un grafo conexo hallar un *circuito de Euler* (o euleriano) es identificar si es posible partir de un vértice del grafo y regresar a él recorriendo todas las aristas del grafo una sola vez (los vértices pueden repetirse, pero las aristas no).

En la primera de las figuras siguientes se puede observar un circuito de Euler, mientras que en el segundo grafo no es posible hallar tal circuito.



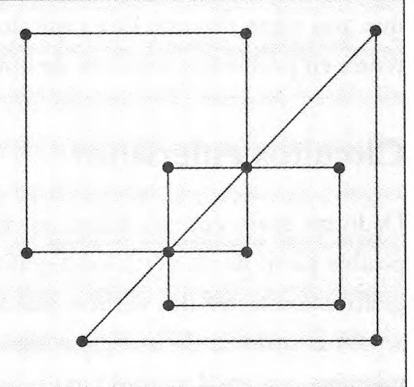
Euler logró aclarar perfectamente cuando un grafo conexo es un circuito euleriano considerando el concepto clave de *grados* (o valencia) de los vértices que son el número de aristas concurrentes en ellos. La clave del asunto viene dada por el teorema de Euler, que dice lo siguiente:

> «Un grafo conexo contiene un circuito euleriano si y sólo si todos los vértices tienen un grado par».

Debe subrayarse que cuando hay circuitos de Euler toda arista debe «emparejarse» con otra en el recorrido y de ahí resulta natural que en los vértices concurra un número par de aristas, es decir, de grados pares. Sabiendo este resultado es inmediato, después de contar los grados de los vértices, dictaminar si hay circuito euleriano. Pero otro tema mucho más difícil puede ser hallar efectivamente dicho circuito.

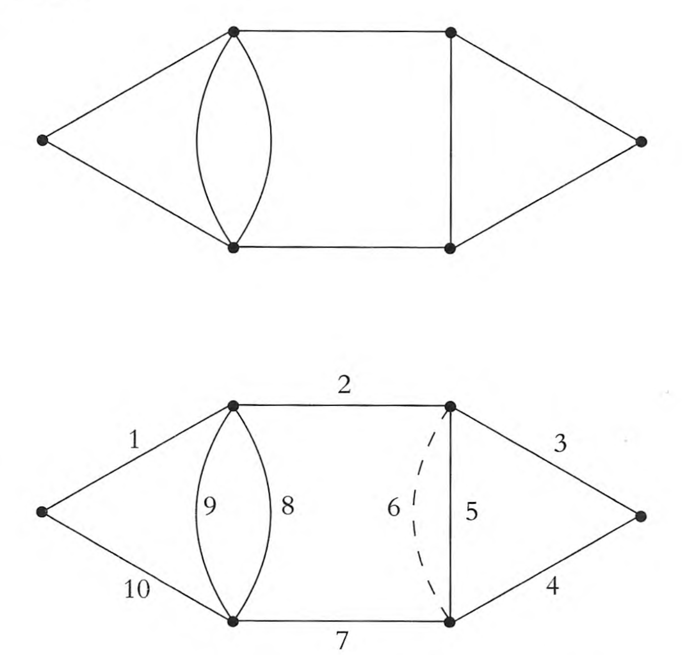
CIRCUITOS EULERIANOS RECREATIVOS

Un juego clásico de matemática recreativa con lápiz y papel es disponer de dibujos de grafos y ver si es posible que el lápiz recorra desde un vértice (sin levantarse del papel) todas las aristas una sola vez y vuelva al punto de partida, es decir, circuitos eulerianos de sobremesa ideales para servilletas de papel. Pruebe con la figura.



El problema del cartero chino

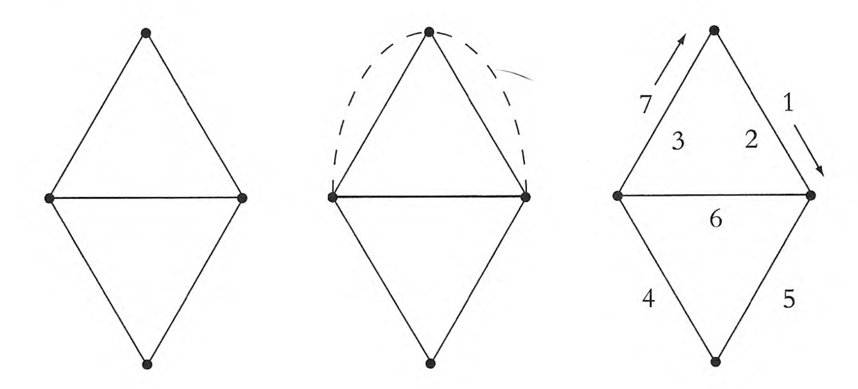
La ruta ideal de un cartero inteligente que desea hacer bien su trabajo (recorrer todas las calles en las que debe dejar cartas) será aquella en que cada calle sólo deba andarse una vez. Si al recorrido de calles se asocia el grafo correspondiente entonces lo ideal es buscar el circuito de Euler que se ha descrito antes. Pero si el circuito euleriano no existe, deberán repetirse algunas calles procurando, eso sí, hacer las mínimas repeticiones. Como este problema fue estudiado por el matemático chino Meigu Guan en 1962, se ha popularizado con el nombre de «el problema del cartero chino».



Si mira atentamente las figuras anteriores observará que hay dos vértices de grado 3; por lo tanto, ya sabe que no será posible un circuito euleriano. Sin embargo, en la segunda figura puede notar que con el truco de introducir tan sólo una nueva arista (marcada con una línea discontinua) ya tiene un circuito euleriano con la trayectoria indicada, en la que únicamente una calle se recorre dos veces (5 y 6). Éste es el método para resolver el problema del cartero chino, lo cual se denomina *eulerizar el grafo*.

Así pues, para que pueda decir aquello de que «el eulerizador que lo eulerice buen eulerizador será» proceda así: si no hay circuito de Euler añada las mínimas aristas necesarias duplicando algunas de las existentes hasta tener un circuito euleriano.

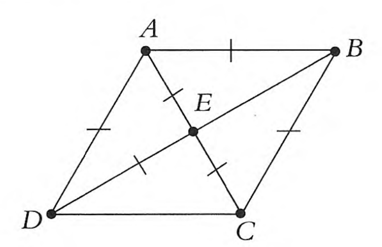
En las figuras siguientes se puede observar una eulerización posible y la trayectoria final del cartero.



Más allá de los carteros, el problema descrito aquí tiene grandes aplicaciones en todo tipo de repartos (o recogidas). En las grandes ciudades, desde la limpieza de las calles hasta todo tipo de repartos comerciales, disponer de buenas rutas de actuación viaria es un tema económico y laboral de gran interés. Afortunadamente, los computadores ayudan hoy en día al diseño eficiente de estas rutas.

Circuitos hamiltonianos

Considérese en un grafo conexo el siguiente problema: ¿se puede hallar un recorrido, partiendo de un vértice, que a través de algunas aristas permita pasar por todos los vértices una sola vez y regresar al vértice de partida? Si este recorrido es posible se le denomina *circuito hamiltoniano*.



En la figura anterior el trayecto *DABCED* sería hamiltoniano. Aunque se «parecen», no se deben confundir los circuitos hamiltonianos con los de Euler: en los circuitos eulerianos únicamente podía pasarse una vez por las aristas (recuerde los

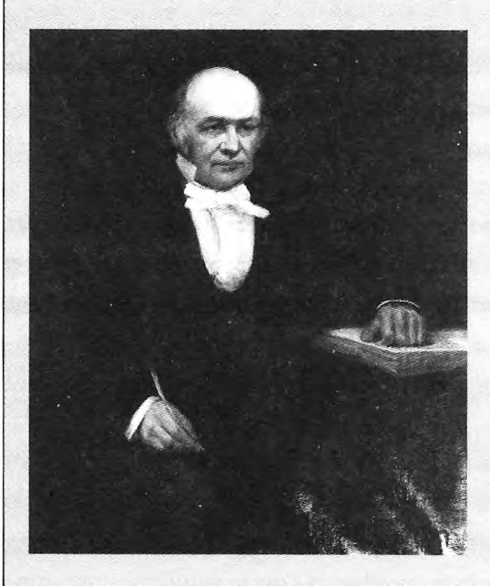
puentes de Königsberg), mientras que en el caso de los hamiltonianos lo que no puede repetirse son los vértices.

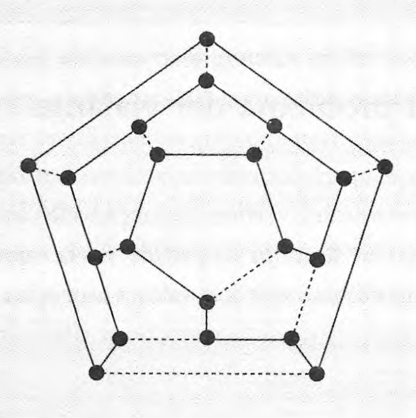
En muchos casos no existirá un circuito hamiltoniano, mientras que en otros puede haber varios. En la figura, *DABCED* y *DCEBAD* lo son, por ejemplo. Por supuesto, si se tiene uno de estos circuitos también se puede considerar un recorrido en sentido inverso.

A pesar de la dificultad que presentan los grafos grandes para determinar circuitos hamiltonianos, el problema es de gran interés para la organización de viajes, para las recogidas de todo tipo, para la distribución de mercancías en los supermercados de una cadena, etc.

UN INVENTO DE 2 GUINEAS

Si bien la idea inicial de estos circuitos en grafos se debe a Thomas Kirkman (1806-1895), el matemático que los popularizó e investigó fue el irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865). En 1859 Hamilton tomó un dodecaedro (que es el poliedro regular con 20 vértices), puso 20 nombres de ciudades en estos vértices y planteó el juego de hallar un recorrido sobre el dodecaedro que partiendo de una ciudad regresara a la misma habiendo visitado las otras 19 ciudades una sola vez. Entusiasmado con su propio juego, «vendió» la idea a un fabricante de juguetes el cual le abonó la ridícula cantidad de 2 guineas. ¡Las buenas ideas no siempre reciben el reconocimiento económico que se merecen!

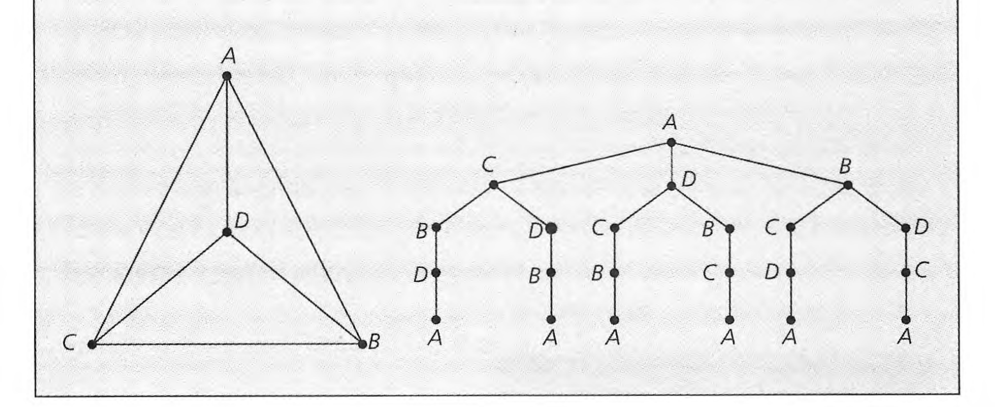




El matemático William Rowan Hamilton y el juego del dodecaedro que él inventó.

MÉTODO DEL ÁRBOL

En las figuras que ilustran este recuadro se aprecia cómo se puede asociar al grafo inicial *ABCD* un árbol completo de rutas posibles para hallar circuitos hamiltonianos que, partiendo de *A*, regresen a *A* tras haber pasado por *B*, *C* y *D* una sola vez. La enumeración de los circuitos hamiltonianos se complica; así, en cada caso tenemos un grafo completo con n vértices de cada ciudad (y hay n) se va a $n-1$ ciudades y de cada una de ellas a $n-2$..., hasta el regreso. Por consiguiente, en cada uno de los casos tenemos $(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$ rutas. Recordando que el factorial de un número natural es el producto del mismo por todos sus anteriores hasta 1 ($6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$) resultan $(n-1)!$ circuitos. Pero al poderse recorrer estos circuitos en sentido inverso salen la mitad de diferentes $(n-1)!/2$...; sin embargo, estos números son enormes: sólo con $n=6$ ya serían $(6-1)!/2=60$ recorridos.



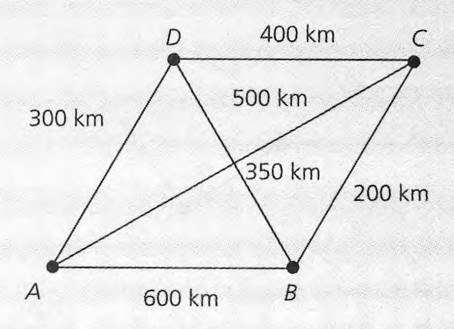
El problema del viajante

En el apartado anterior se han abordado los posibles circuitos hamiltonianos para partir de un vértice, recorrer todos los vértices pasando por ellos una sola vez y regresar al punto de partida. En la mayor parte de las aplicaciones no sólo se tiene el grafo, sino que hay valores asociados a las aristas (coste del desplazamiento, kilómetros...) y, por lo tanto, no se desea únicamente hallar un circuito, sino minimizar costes o tiempo o kilometraje.

Piénsese en el cartero, el viajante vendedor o el distribuidor de refrescos; todos desean hacer su trabajo y regresar a casa haciendo el mínimo recorrido. Y cuando usted organiza sus vacaciones esta cuestión también es de su interés (puede querer realizar desplazamientos en el menor tiempo posible, o con el mínimo coste aun-

ALGORITMO DEL VECINO MÁS CERCANO

Imagine que *ABCD* son ciudades y los números de las aristas son kilómetros y usted parte de *A*. Tiene tres alternativas de 300 km, 500 km y 600 km; elija la más cercana, *D*. De ahí tiene las opciones de 350 km y 400 km; elija la más cercana, *B*. Desde *B* debe ir a *C* y luego regresar a *A*. Éste es un tipo de los llamados *algoritmos avaros* pues, paso a paso, se escoge la opción más avariciosa (menor coste, menor tiempo, menor distancia...). Este algoritmo es una forma de ordenar una ruta pero no garantiza que globalmente dé siempre la solución óptima. Una alternativa (tampoco óptima) es la del *algoritmo de las aristas clasificadas*, en el que las aristas que se van añadiendo en la determinación del circuito son elegidas en orden de incremento de pesos, evitando añadir circuitos que impidan tener el recorrido hamiltoniano.



que sean más largos, etc.). En el capítulo 5 se demuestra que este tema es clave en programación lineal.

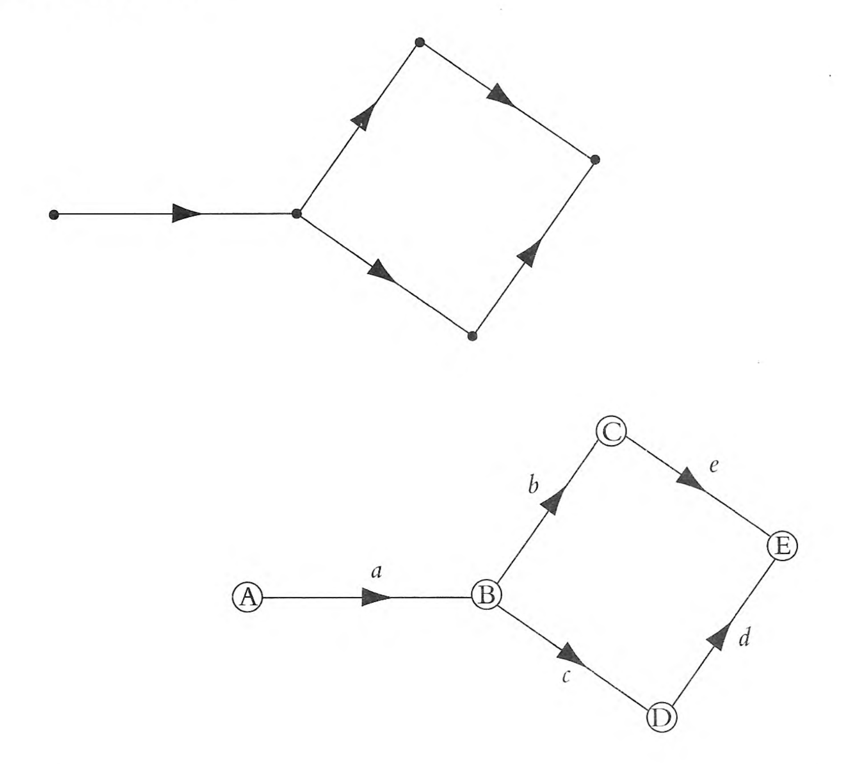
La complejidad de resolver el problema del viajante para grandes grafos hace de él un caso emblemático de los denominados problemas NP-completos, es decir, se considera que nunca será posible encontrar un algoritmo «rápido» para obtener soluciones óptimas. Las ciencias de la computación han considerado el concepto de «rapidez» algorítmica en relación a la ejecución de programas informáticos y el tiempo necesario para esta ejecución.

ALGORITMO DE KRUSKAL

Joseph Bernard Kruskal (1928), un analista combinatorio de los Laboratorios Bell formado en la Universidad de Princeton, ideó hacia los años cincuenta un algoritmo remarcable: añadir aristas por orden de coste más económico hasta generar un árbol de coste mínimo.

Caminos críticos

En multitud de situaciones reales interesa pasar de grafos a *dígrafos* o *grafos dirigidos*, añadiendo flechas a las aristas para indicar una determinada direccionalidad o secuencia. En la primera figura inferior el dígrafo podría representar recorridos en calles de dirección única. En la segunda figura el (mismo) dígrafo podría estar representando una serie de tareas (*A, B, C, D, E*) que se tienen que realizar y el orden en que éstas deben llevarse a cabo.



Redes eléctricas, tráfico, conexiones telefónicas, planificaciones de fabricación industrial, operaciones de reparación, etc. llevan a trabajar con dígrafos. Tal y como se puede observar en la segunda figura es frecuente que en los nodos *A, B, C, D, E* se sitúen no puntos sino círculos o rectángulos dentro de los cuales se describan tareas (descargar, pintar, ordenar, etc.) e incluso *pesos* o *ponderaciones* sobre tales tareas (1.000 euros, 12 minutos, etc.) y en las aristas orientadas o arcos aparezcan también pesos valorando el coste, el tiempo, etc. que exige tal recorrido o secuencia de acciones.

OPTIMIZAR TIEMPOS AÉREOS

En los aeropuertos interesa optimizar el poco tiempo que transcurre entre la llegada y la salida del avión. Llegado el avión al punto de *parking* se procede entonces a tareas tales como:

A. Descargar pasajeros.
B. Descargar mercancías y maletas.
C. Limpiar el interior.
D. Reabastecer de bebidas y comidas.
E. Inspeccionar el avión.
F. Recargar combustible.
G. Cargar nuevas mercancías.
H. Cargar nuevos pasajeros.

Algunas de estas acciones admiten simultaneidad (por ejemplo, A y B, C y D, E y F) y otras secuencialidad (C no empieza si A no se ha acabado, G va después de B, etc.). La acción culminante es H (habiéndose acabado F aunque esté desarrollándose G). Si en 20 minutos debe hacerse todo esto, el dígrafo correspondiente debe estar bien ajustado y el camino crítico afectará a la planificación de los vuelos. ¡Y también a las esperas y retrasos!

Es en estos casos de cierta complejidad cuando es muy relevante hallar los caminos críticos, aquellos que por su coste o por el tiempo que requieren serán decisivos para poder llegar al final. En el ejemplo de la figura superior si los tiempos *a*, *b*, *e* suman 34 días y los *a*, *c*, *d* suman 45 días, el camino crítico es el *ABDE*, pues si no se ha podido completar todo el camino crítico, aunque otras operaciones hayan concluido, el proyecto final total no puede darse por acabado.

Grafos y planificación: el sistema P.E.R.T.

A partir de la Segunda Guerra Mundial se desarrolló una extensa gama de métodos destinados a la optimización de planificaciones. Fue el lanzamiento del Sputnik soviético el que motivó a los estadounidenses a iniciar grandes proyectos, desde el Polaris de misiles balísticos lanzados desde submarinos hasta la llegada del hombre a la Luna. Y grandes proyectos exigían métodos adecuados de planificación. Dichos métodos configuran el llamado *análisis de mallas* y entre los más importantes cabe citar los siguientes:

1. P.E.R.T. (Program Evaluation and Review Technique), es decir, Técnica de Revisión y Evaluación de Programa. Fue desarrollado por la Marina de Estados Unidos en 1958 y ha demostrado ser de gran interés en las planificaciones complejas de tiempos y costos.

2. C.P.M. (Critical Path Method). Este método fue especialmente aplicable a planificaciones temporales y al estudio de caminos críticos o series de actividades coordinables que podían afectar con retrasos a la buena marcha de la planificación. Otros métodos semejantes son el C.P.S. (Critical Path Analysis), el P.E.P. (Program Evaluation Procedure), el L.E.S.S. (Least Cost Estimating and Scheduling) y el S.C.A.N.S. (Scheduling and Control by Automated Network).

3. R.A.M.P.S. (Resource Allocation and Multi-Project Scheduling). Este método amplía el P.E.R.T. y se aplica especialmente a la distribución de recursos limitados entre varios proyectos independientes.

Organigrama de la realización de un P.E.R.T.

En términos generales, un P.E.R.T. presenta el siguiente organigrama:



PROGRAMACIÓN DE HORARIOS CON CAMINOS CRÍTICOS

En la industria que fabrica un producto en el que intervienen diversas máquinas u operarios, así como en el aprovechamiento máximo de personas y máquinas en una cadena productiva, aparece de nuevo el interés por los *algoritmos de procesamiento, programación de horarios* y *estudio de caminos críticos*, siendo central establecer *dependencias o independencias* de las tareas. Ronald Graham ideó un algoritmo de procesamiento de una lista de actividades con m procesadores evaluando que si T era el tiempo óptimo, el algoritmo no superaría $(2 - (1/m))T$. Aquí un procesador es una persona, máquina o sistema con tiempos programados. En el *algoritmo de tiempos decrecientes*, en el que las actividades más largas se programan primero, el tiempo no supera $[4/3 - 1/(3m)]T$. Pero las *soluciones heurísticas* particulares nunca deben despreciarse.

En general, el sistema P.E.R.T. que aquí comentaremos se basa en los siguientes principios:

1. *Se establece una división estructural ordenada de las actividades del proyecto*. Esta división puede hacerse mediante la ayuda de un organigrama que permite visualizar las actividades esenciales y de detalle que configuran el proyecto, así como los grupos de actividades que deben ser realizadas por cada uno de los equipos involucrados en la realización efectiva del proyecto.

2. *Se definen las tareas*. Esta especificación de las tareas básicas que hay que realizar (así como de las tecnologías que se precisan) permite delimitar los bloques de trabajo. Con esta etapa quedarán especificadas todas las actividades y sucesos del proyecto.

3. *Se asignan recursos a cada tarea y se fijan plazos de ejecución*. Aquí debe realizarse un «calendario» de la realización del proyecto especificando el tiempo global y los tiempos parciales de las actividades, teniendo en cuenta todos aquellos factores que pueden influir en la planificación temporal (recursos, tecnologías, equipos, etc.). Una de las originalidades del P.E.R.T. es haber introducido varios conceptos de tiempo:
   a) T_o: *tiempo optimista* o tiempo que marcaría una marcha excepcional de las tareas;

b) T_p: *tiempo pesimista* o tiempo estimado de duración de actividades adversas o catastróficas para la marcha del proyecto;

c) T_m: *tiempo medio* o probable, o tiempo evaluado estadísticamente a partir de experiencias anteriores;

d) T_e: *tiempo previsto*, que es el que realmente se incluye en el P.E.R.T. para cada actividad y se calcula con la fórmula (de justificación estadística):

$$T_e = \frac{T_o + T_p + 4T_m}{6},$$

es decir, mediante una media ponderada de los tiempos optimista, pesimista y medio. Se asocia a este cálculo una desviación estándar $\frac{T_p + T_o}{6}$ cuyo cuadrado evalúa la variabilidad.

4. *Se estudian y definen las dependencias.* En esta etapa se establecen todas las posibles dependencias entre las actividades del proyecto (limitaciones de recursos, de espacio físico, de equipos, de orden intrínseco de colocación, etc.).

5. *Se elabora la red o grafo que constituye el modelo fundamental para la aplicación del sistema.* Para realizar dicho grafo deben adoptarse los criterios siguientes:

a) Los *sucesos* (comienzo o final de una actividad) son los vértices del grafo. Se representan con círculos y rectángulos dentro de los cuales se escribe el suceso en palabras y se incluye la numeración del mismo respecto de los otros sucesos.

b) Las *actividades* se corresponden con las aristas del grafo (dirigidas o no) y se establecen entre los sucesos relacionados. Sobre cada arista o actividad se especifica un número que corresponde al tiempo previsto T_e para tal actividad.

Unas reglas complementarias para la realización efectiva del grafo o red son las siguientes normas que ayudan a la clarificación de lectura del grafo:

a) Cada actividad tiene un suceso precedente y uno final. Se pueden introducir actividades ficticias (tiempo 0) resultantes de reescribir un mismo suceso varias veces (con numeración diferente) si a partir de él se empiezan actividades diferenciadas.

b) Un suceso se considera realizado sólo cuando han finalizado todas las actividades que le preceden.

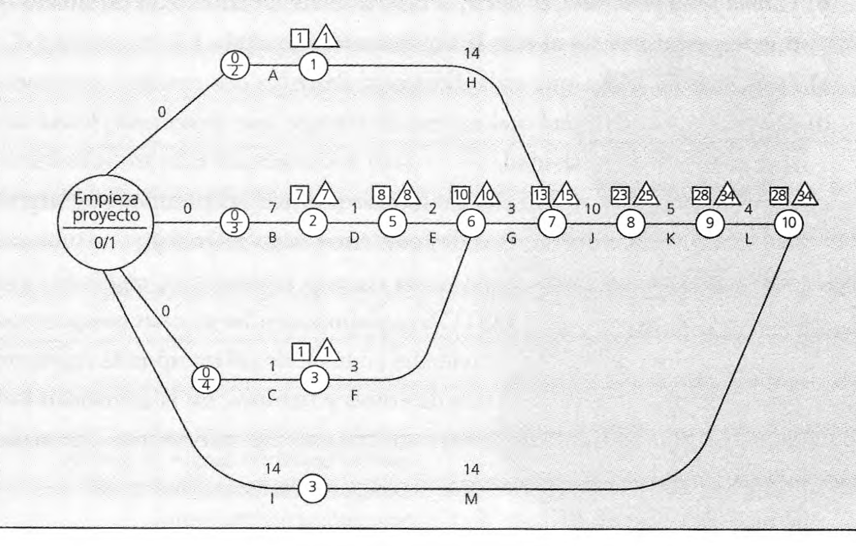
c) Deben evitarse las actividades paralelas entre dos sucesos, rompiendo dicho paralelismo a través de actividades ficticias (tiempo 0).

EJEMPLO DE UN P.E.R.T. EN CONSTRUCCIÓN

A continuación se analiza un típico P.E.R.T. sobre la construcción de una casa, abarcando sólo las primeras actividades. Se empieza haciendo la tabla de las tareas iniciales, y para cada una se asigna una letra o número, así como un tiempo estimado (T_e) y una determinación de dependencias:

Letra	Actividad	Comienzo suceso nº	Final suceso nº	T_e
A	Pedido ladrillos	0 (2)	1	1
B	Pedido equipo	0 (3)	2	7
C	Pedido hormigón	0 (4)	3	1
D	Explanar solar	2	5	1
E	Excavar	5	6	2
F	Entrega hormigón	3	6	3
G	Echar cimientos	6	7	3
H	Entrega ladrillos	1	7	14
I	Diseño y pedido carpintería	0	4	14
J	Construcción muros	7	8	10
K	Construcción forjados	8	9	5
L	Construcción cubierta	9	10	4
M	Entrega carpintería	4	10	14

Ahora ya se puede elaborar el grafo correspondiente [colocando en cada vértice (afuera) un cuadrado y un triángulo; en el cuadrado puede especificarse el día del calendario en que podría empezar el suceso y en el triángulo, el día en que podría terminar.



Una ampliación típica de este grafo, hasta la conclusión de la obra, sería la que muestra la figura siguiente.

d) Deben crearse sucesos intermedios y actividades ficticias que eliminen vértices del grafo de grado 4 o superior.

e) Ningún suceso puede ser a la vez inicial y final de un camino de actividades de la red.

6. Por último, *se realizan estudios sobre el grafo de P.E.R.T.* Por ejemplo, son de interés los siguientes parámetros:

a) *Fecha de máxima antelación* del final o inicio de un suceso siguiendo un camino de actividades.

b) *Última fecha permisible*, es decir, la última fecha en el final de un suceso que puede permitirse sin alterar la organización general.

c) *Holgura de un suceso*, que es la diferencia entre los dos tiempos anteriores.

d) *Margen* de *una actividad* o el exceso de tiempo que puede emplearse en la realización de tal actividad.

e) *Camino crítico*, el camino del grafo que requiere el tiempo más largo de realización (entre dos sucesos dados o entre todo el grafo).

El llamado sistema P.E.R.T./COSTOS se elabora con las mismas premisas, pero teniendo en cuenta los costes de las actividades en lugar de sus tiempos de realización. También puede hacerse P.E.R.T. mixtos de costes y tiempos. En la actualidad todos los sistemas de planificación usuales tienen un tratamiento informático adecuado y fácil de utilizar.

Capítulo 4

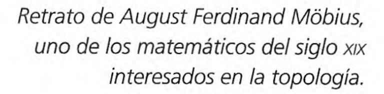
Grafos y geometría

La inspiración es tan necesaria
en geometría como en poesía.
Alexander Pushkin

Muchas propiedades que se estudian en geometría dependen de las medidas de los objetos: ángulos, distancias, perpendicularidades, superficies, volúmenes, etc. Sin embargo, las consideraciones típicas de la teoría de grafos y la topología también han ayudado a aclarar hechos geométricos que no dependen tanto de las mediciones como de la configuración en sí. Este pequeño capítulo le invita a disfrutar de la popular fórmula de Euler y derivar de ella con suma facilidad muchas consecuencias sorprendentes para la geometría de los poliedros o los mosaicos.

La fórmula de Descartes de 1640 y la fórmula de Euler de 1752, al basarse sólo en caras, vértices y aristas, eran aplicables a muchas figuras diferentes y seguían siendo válidas al hacer determinadas deformaciones. Ello daría pie a una nueva rama de la matemática llamada *topología* que adquirió gran desarrollo en el siglo XIX. A.F. Möbius, B. Riemann, H. Poincaré, L.E.J. Brouwer, S. Lefschetz y muchos otros matemáticos de especialidades diversas encontraron en esta «nueva geometría» un pilar fundamental para estudiar curvas, superficies, espacios, funciones... pudiendo establecer con esta topología propiedades que en el marco geométrico tradicional no hubiesen podido formalizarse.



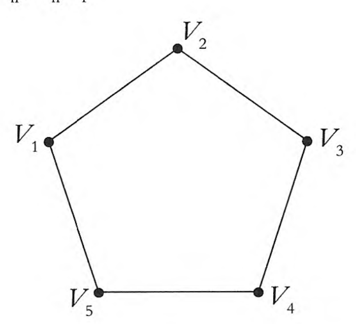


Retrato de August Ferdinand Möbius, uno de los matemáticos del siglo XIX interesados en la topología.

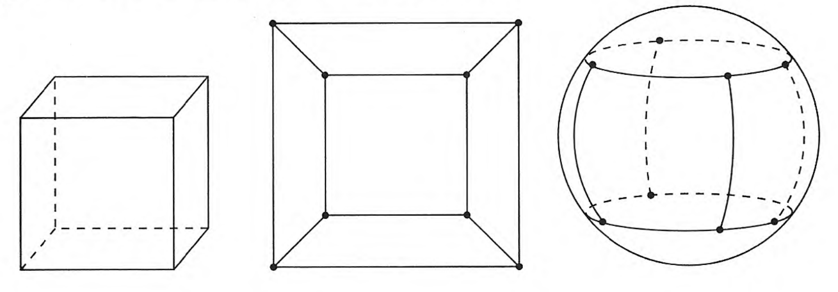
De forma breve, podría decirse que la topología se libera de las estructuras rígidas de la geometría euclídea, o de la geometría proyectiva, y al permitir «deformaciones continuas» logra modelizar un nuevo mundo de formas y usar nuevas categorías de transformaciones. Imagine un triángulo dibujado en la superficie de un globo. Al apretar el globo (sin hacerlo estallar) el pobre triángulo adquiere formas diversas en las cuales variarán ángulos y longitudes, aunque la «esencia triangular» de figura determinada por tres puntos y tres líneas entre ellos se mantendrá. El hecho de pensar en figuras de goma deformables es un buen recurso visual para pensar topológicamente. Así, una esfera nunca dará por deformación un Donut, pero un Donut (con su agujero)... es equivalente a la taza de café.

La sorprendente fórmula de Euler

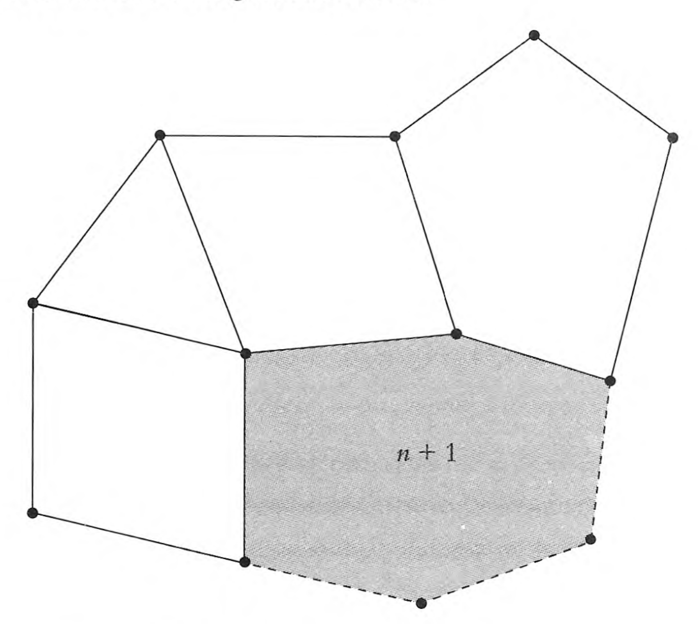
Considérese un *polígono convexo* con sus *n* vértices V_1, V_2..., V_n y las correspondientes aristas V_1V_2, V_2V_3..., $V_{n-1}V_n$, V_nV_1.



Al margen de las longitudes de los lados, de los ángulos, de la rectitud de las aristas, etc., una relación que siempre vale es que el *número de aristas es igual al número de vértices*, relación tan trivial que hasta podría pasar desapercibida. Si mantiene los vértices y entre los correspondientes sustituye la arista recta por cualquier curva simple, la relación vértices/aristas se mantendrá.



Pasemos ahora al espacio y consideremos un *poliedro convexo* cualquiera determinado por V vértices, A aristas y C caras poligonales. Si desde un punto interior se proyecta el poliedro en una esfera grande que lo incluya, en dicha esfera quedan marcadas las líneas y los vértices correspondientes, de forma que los valores de V, A y C se mantendrán en la configuración esférica.



También puede hacerse corresponder el poliedro con un mapa poligonal que tenga el mismo número de aristas A, el mismo número de vértices V, y C caras.

Entonces puede observar inductivamente que si $C = 2$ se tiene un triste polígono y $V = A$, o lo que es lo mismo, $C + V = A + 2$. Si con $C = n$ se tienen V_n vértices, A_n aristas y se supone inductivamente que $n + V_n = A_n + 2$ entonces con $C = n + 1$ deberá fijarse la atención en una cara (la $n + 1$). Esta configuración se obtiene al añadir una cierta cantidad de K vértices y $K + 1$ aristas a un mapa con n caras, V_n vértices y A_n aristas; por lo tanto,

$$C+V_{n+1}=n+1+V_n+K=(n+V_n)+(K+1)=(A_n+2)+(K+1)=$$
$$=(A_n+K+1)+2=A_{n+1}+2.$$

Así queda establecida la famosa fórmula de Euler, que dice lo siguiente:

En todo poliedro convexo vale la relación $C + V = A + 2$.

Si se piensa un poco, aunque en primera instancia puede parecer un resultado vulgar (¡hace años que se recita el «caras más vértices igual a aristas más dos»!) se trata de una relación sorprendente, ya que vale para *cualquier poliedro convexo*, no importa ni el tipo de caras, ni los ángulos en las caras poligonales, ni los ángulos entre los planos de las caras, ni las longitudes de las aristas... Una fórmula para una familia infinita y dispar de figuras es algo que debe llamar la atención. No es normal. Apenas existen fórmulas que valgan para figuras tan distintas. Es una fórmula subversiva que se ríe de las medidas para dar una relación numérica puramente combinatoria.

DE ACUERDO, $A = C + V - 2$. ¿PUEDO INVENTARME C Y V?

Si se tiene un poliedro convexo, *entonces* $C + V = A + 2$ y, por lo tanto,

$$A = C + V - 2. \qquad (1)$$

Pero ¿qué valores razonables para C y V pueden tenerse? ¿Hay algunas restricciones que se deben tener en cuenta para C y V? ¿Se imagina $C = 1.000$, $V = 2$? Descubra aquí, por favor, las restricciones sensatas para C y V.

Evidentemente $V \geq 4$, pues con menos de 4 vértices no se tendrá un poliedro, y por lo menos en cada vértice concurrirán 3 aristas, así que $3 \cdot V \leq 2A$, al ser cada arista determinada por dos vértices. Por lo, tanto $3V \leq 2C + 2V - 4$, de lo que resulta:

$$4 \leq V \leq 2C - 4. \qquad (2)$$

También $C \geq 4$, pues al menos se necesitan cuatro caras para cerrar un trozo de espacio y como mínimo se necesita disponer de tres aristas para cada cara, o sea, $3C \leq 2A = 2C + 2V - 4$, de donde:

$$4 \leq C \leq 2V - 4. \qquad (3)$$

Las relaciones (1), (2) y (3) son las que corresponden a los poliedros convexos del espacio. Los ejemplos más simples de poliedros con un número cualquiera de caras $C \geq 4$ son las pirámides y bipirámides: con el polígono base de $2K$ aristas y un punto exterior se tiene la pirámide con $C = 2K + 1$ y con dos de estas pirámides soldando sus bases se tiene una bipirámide con $C = 4K$.

A partir de la fórmula de Euler en poliedros convexos asociados a la esfera puede considerar la llamada *característica de Euler-Poincaré:*

$$\chi = V - A + C.$$

En el caso esférico se ha visto que $\chi = 2$. Si se considera un toro (una superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de un eje exterior a la misma), entonces se obtiene $\chi = 0$ y, por lo tanto, en «poliedros toroidales» es $0 = C + V - A$. El género de una superficie

$$g = \frac{1}{2}(2 - \chi)$$

se corresponde con el número de «agujeros» de la misma (en la esfera $g = 0$, y, por lo tanto, en poliedros toroidales es $g = 1$...). Así pues, la χ o la g son realmente *características de la superficie*, es decir, el «2» en el $C + V = A + 2$ esconde la presencia del «carácter esférico» de los poliedros convexos. Esta relación de Euler no es válida en los poliedros cóncavos.

Manteniéndose en el mundo poliedral convexo, los siguientes apartados explotarán enormemente las consecuencias de $C + V = A + 2$.

La fórmula de Euler sólo con caras y vértices

Ahora ya conoce las limitaciones sobre el número de caras C y sobre el número de vértices V de un poliedro convexo. El número de aristas A dependía totalmente de C y V. Lo que se le propone a continuación es eliminar A de la fórmula de Euler.

Para la total eliminación del número A el precio que deberá pagarse es simplemente ser «más explícita/o» con C y V, concretando lo que se esconde detrás de dichos números.

A partir de un poliedro convexo P con C caras y V vértices indique por C_n el número de caras con n – aristas y por V_n el número de vértices con n – aristas. Así podrá escribir sumas (¡finitas!) del siguiente estilo:

$$C = C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + \ldots \qquad (1)$$

Y también:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \ldots \qquad (2)$$

Como una arista pertenece a la vez a dos caras, deberá tener:

$$3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + 6C_6 + ... = 2A \qquad (3)$$

Y como cada arista une dos vértices, también será:

$$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ... = 2A \qquad (4)$$

Si se ayuda entonces de la fórmula de Euler doblada, $2C + 2V = 4 + 2A$, le resultará usando (1), (2) y (3):

$$2C_3 + 2C_4 + 2C_5 + 2C_6 + ... + 2V_3 + 2V_4 + 2V_5 + 2V_6 + ... =$$
$$= 4 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + 6C_6 + ...,$$

Es decir,

$$2V_3 + 2V_4 + 2V_5 + 2V_6 + ... = 4 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + 6C_6 + ... \qquad (5)$$

Y de forma similar, usando (1), (2) y (4) le quedará:

$$2C_3 + 2C_4 + 2C_5 + 2C_6 + ... + 2V_3 + 2V_4 + 2V_5 + 2V_6 + ... =$$
$$= 4 + 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ...,$$

Es decir,

$$2C_3 + 2C_4 + 2C_5 + 2C_6 + ... = 4 + 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ... \qquad (6)$$

Aunque su mente experimente en este momento sentimientos de frustración ante igualdades tan feas, debe alegrarse de haber traducido la fórmula de Euler a relaciones explícitas entre tipos de caras y de vértices, sin aristas.

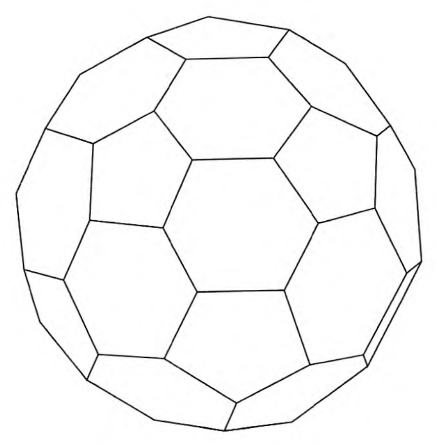
Si suma la (5) y el doble de la (6) resulta:

$$2V_3 + 2V_4 + 2V_5 + 2V_6 + ... + 4C_3 + 4C_4 + 4C_5 + 4C_6 + ... =$$
$$= 12 + C_3 + 2C_4 + 3C_5 + 4C_6 + ... + 2V_3 + 4V_4 + 6V_5 + 8V_6 + ...$$

Y simplificando llega a la maravillosa expresión:

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 = 12 + 2V_4 + 4C_5 + ... + C_7 + 2C_8 + ... \qquad (\star)$$

donde las aristas no están explícitas, las caras hexagonales no aparecen y los vértices con tres aristas tampoco. Disfrute de (⋆) y memorícela: le aportará enormes descubrimientos curiosos. Para empezar, ¿ha observado un balón de fútbol? Es un poliedro semirregular que combina pentágonos y hexágonos y en el que cada vértice recibe 3 aristas.



¿Hay otros poliedros con estos tipos de caras y vértices? Nótese que $C3 = C4 = = Cn = 0$ si $n \geq 7$, $V4 = Vn = 0, n \geq 5$..., por lo tanto, según (⋆) debe ser $C5 = = 12$ pero $C6$ no queda determinado (B. Grünbaum y T.S. Motzkin han probado que de hecho C6 puede tomar cualquier valor diferente de 1). Una curiosa docena de caras pentagonales.

Si se interesa por combinaciones de cuadriláteros y hexágonos tendrá por (⋆) que $2C_4 = 12 + 2V_4 + 5V_5 + ...$, es decir, al menos tendrá 6 cuadriláteros (y si los vértices son de grado 3, seis cuadriláteros exactamente). Si combina triángulos y hexágonos deberá ser $3C_3 = 12 + 2V_4 + 4V_5 + ...$ y al menos tendrá 4 triángulos (y si los vértices son de grado 3, cuatro caras triangulares exactamente).

Siempre hay un triángulo, un cuadrilátero o un pentágono

Piense un poco en el mundo poliédrico que habita en su mente, ¿recuerda algún poliedro convexo que no tenga ni un solo triángulo, cuadrilátero o pentágono? Claro que no, este poliedro convexo no existe.

Recupere la fórmula (*) del apartado anterior:

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 = 12 + 2V_4 + 4C_5 + ... + C_7 + 2C_8 + ... \qquad (*)$$

Note que a la derecha de la fórmula al menos tendrá un 12, es decir, siempre

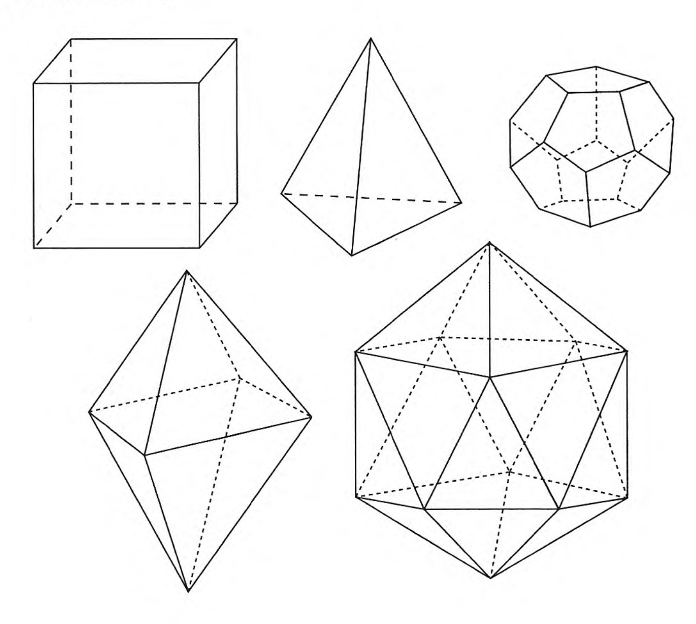
$$3C_3 + 2C_4 + C_5 \geq 12,$$

luego los números C_3, C_4 y C_5 no pueden ser simultáneamente nulos... Puede establecerse ya el siguiente teorema:

En todo poliedro convexo hay siempre por lo menos un triángulo o un cuadrilátero o un pentágono.

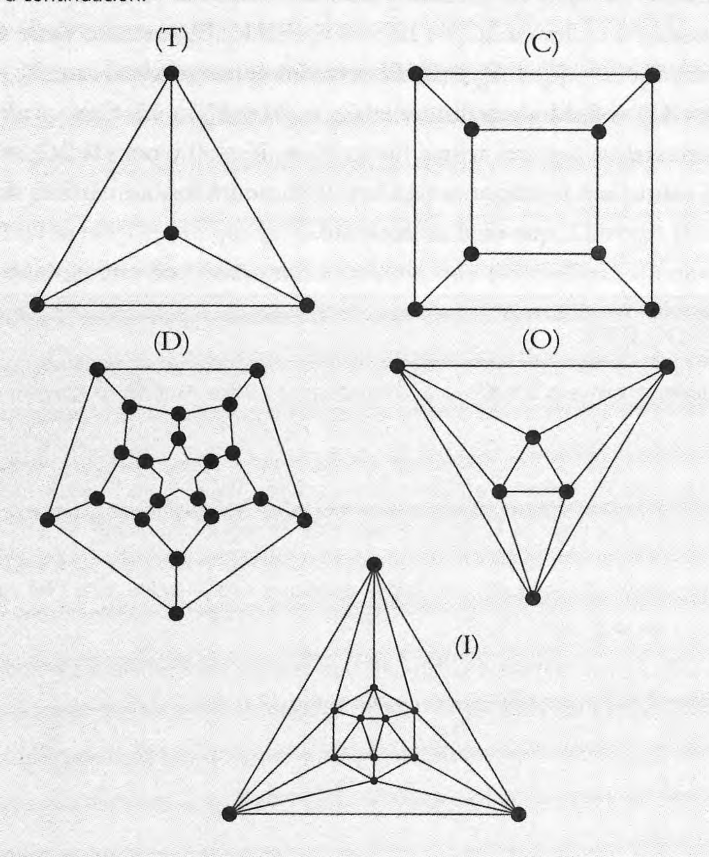
Podrá haber otras caras, pero al menos una cara de este tipo de 3, 4 o 5 aristas debe estar. Si recuerda ahora que un poliedro regular es un poliedro convexo que tiene todas las caras poligonales regulares idénticas y todos sus vértices reciben el mismo número de aristas, puede entenderse el teorema siguiente:

Los únicos poliedros regulares son el tetraedro, el octaedro, el icosaedro, el cubo y el dodecaedro.



LOS GRAFOS DE LOS POLIEDROS REGULARES

La alternativa a dibujar en perspectiva los cinco tipos de poliedros regulares es dibujar sus grafos correspondientes. Las siguientes figuras poseen la tabla de los valores de *V*, *A* y *C* que se muestra a continuación.



V	A	C			
4	6	4	....	Tetraedro	(T)
8	12	6	....	Cubo	(C)
20	30	12	....	Dodecaedro	(D)
6	12	8	....	Octaedro	(O)
12	30	20	....	Icosaedro	(I)

Nótese que este teorema combina la relación general euleriana con las características angulares de los polígonos implicados que delimitan los posibles rincones espaciales que pueden formarse con triángulos, cuadrados o pentágonos.

En efecto, por lo que acaba de verse (siempre hay un triángulo o un cuadrilátero o un pentágono) y por la definición de poliedro regular, los únicos regulares estarán formados enteramente o por triángulos equiláteros o por cuadrados o por pentágonos regulares.

Si sólo tiene triángulos equiláteros para combinar, recordando sus ángulos de 60°, la fórmula (*) le lleva a $3C_3 = 12 + 2V_4 + 4V_5$. El tetraedro tiene $C_3 = 4$ (y, por supuesto, $V_3 = 4$, $V_4 = V_5 = 0$). El octaedro corresponde al caso $V_4 = 6$, $V_3 = V_5 = 0$ y $C_3 = 8$. El icosaedro tiene $C_3 = 20$ y $V_5 = 12$. Con cuadrados sólo puede tener vértices con tres aristas, luego $V_4 = V_5 = 0$ y por (*) $2C_4 = 12$, o sea $C_4 = 6$, el cubo. Con pentágonos regulares sólo podrá formar vértices de grado 3, luego por (*) $C_5 = 12$, que es el dodecaedro.

CONTANDO BIEN

Sea P un poliedro convexo con $r(P)$ caras, considérense los dos parámetros expuestos a continuación:

$r(P)$: es la cantidad de números naturales i para los cuales hay en P una cara con i aristas.
$K(P)$: es el número de lados de la cara que tiene más vértices o aristas en P.

Así, con un cubo P se tendría $r(P) = 1$, $K(P) = 4$, pero en una pirámide recta P de base pentagonal sería $r(P) = 2$, $K(P) = 5$.
Si P tiene una cara con $K(P)$ lados, como cada uno de estos lados es una arista de otra cara, en total se tendrá por lo menos $K(P) + 1$ caras, es decir,

$$C(P) \geq K(P) + 1.$$

Como el mismo $r(P)$ no podrá superar nunca al cardinal del conjunto {3 , 4 , 5,..., K(P)} será:

$$r(P) \leq K(P) - 2.$$

Así, las desigualdades anteriores para $C(P)$ y $r(P)$ llevan a:

$$C(P) - r(P) \geq K(P) + 1 - (K(P) -2) = 3.$$

Si un poliedro tuviese todas las caras diferentes se tendría $C(P) = r(P)$ 3, lo cual es imposible.

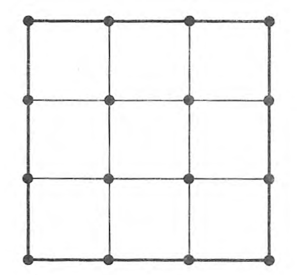
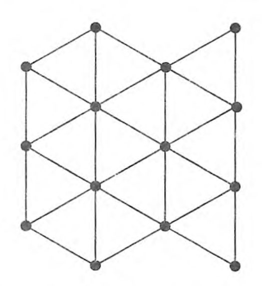
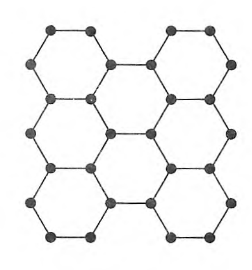
¿Todas las caras diferentes? ¡Imposible!

Si usted es una persona rebelde es posible que ante las tradicionales repeticiones geométricas intente plantear la búsqueda de figuras en las que no se den tales repeticiones. Por ejemplo, puede plantearse cómo formar un poliedro convexo en el que todas sus caras sean polígonos diferentes (un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono...). Sería como tener un poliedro-muestrario para ir por el mundo enseñando polígonos. La sorpresa es que nunca podrá existir este poliedro. Y el argumento es una bellísima meditación combinatoria.

Piense por un momento en todos los poliedros convexos que pueda imaginar, tan regulares o tan raros como quiera. Si los visualiza, uno detrás de otro, podrá empezar a notar que siempre hay como mínimo caras que son polígonos convexos con el mismo número de lados. Un cerramiento poligonal espacial siempre parece exigir al menos la repetición de algunos tipos poligonales.

Grafos y mosaicos

Obsérvense estos tres tipos de mosaico; todos ellos nos deben ser familiares, puesto que aparecen en multitud de sitios.

Se trata respectivamente de mosaicos *cuadrangulares, triangulares y hexagonales.* Cada uno de estos mosaicos es un grafo poligonal en el sentido antes definido. En los tres casos pueden ampliarse el número de caras *indefinidamente*: se podría *llenar todo el plano.* Nótese que en cada estadio de la ampliación del mosaico los vértices que quedan en el interior tienen un número de aristas constante, y cada cara está limitada por el mismo número de aristas, excepto la cara del infinito. Si en las sucesivas ampliaciones de un mosaico se cuenta el número de vértices V que van apareciendo, y en cada paso el número V_e de esos vértices que quedan situados lindantes (en el ciclo frontera) con la cara exterior, se verá que el cociente $\frac{V_e}{V}$ tiende a cero cuando V crece.

Las observaciones anteriores son válidas en los tres mosaicos considerados. A continuación se demostrará un resultado sorprendente partiendo de la siguiente definición:

Un *mosaico regular* es un grafo poligonal que recurrentemente puede cubrir todo el plano y tal que el número de aristas a en cada vértice y el número de aristas $b \geq 3$ en cada cara son ambos constantes (exceptuando la cara exterior), siendo $\frac{V_e}{V}$ tendiente a cero.

Los únicos mosaicos regulares (en el sentido de esta definición) son el triangular, el cuadrangular y el hexagonal.

En efecto, si tenemos un mosaico regular M, cuando M tiene V vértices, A aristas y V_e vértices en la frontera, resulta que $2A < aV$ dado que aV correspondería a asignar a todos los vértices (incluso los de la frontera) a aristas. Contrariamente, si no se cuentan aristas en los vértices de la frontera, se tendría $aV - aV_e < 2A$. Reuniendo ambas desigualdades resulta:

$$aV - aV_e < 2A < aV.$$

Y dividiendo por $2V$:

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\frac{V_e}{V} < \frac{A}{V} < \frac{a}{2}.$$

Pasando al límite, cuando V tiende a infinito, $\frac{V_e}{V}$ tiende a cero:

$$\lim_{V \to \infty} \frac{A}{V} = \frac{a}{2}. \qquad (\star)$$

Contabilicemos ahora el número de caras C del mosaico M. $C - 1$ de estas caras tienen b aristas lindantes y la cara del infinito tiene V_e aristas; por lo tanto,

$$(C - 1)b + V_e = 2A.$$

Dividiendo por $b\,V$ resulta:

$$\frac{C-1}{V} + \frac{V_e}{Vb} = \frac{2A}{bV}$$

y pasando al límite, cuando V tiende a infinito, se obtiene a la vista de (*) y de las hipótesis:

$$\lim_{V\to\infty}\frac{C}{V}=\lim_{V\to\infty}\frac{2A}{bV}=\frac{2}{b}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{b}. \qquad (**)$$

Como el mosaico M es un grafo poligonal, la fórmula de Euler es válida y puede escribirse de la forma siguiente:

$$\frac{C}{V}+1=\frac{A}{V}+\frac{2}{V}.$$

Al pasar al límite, será:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{a}{2};$$

es decir, los parámetros constantes a y b resultan ligados por la ecuación:

$$2a + 2b = ab,$$

que puede escribirse:

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Las únicas soluciones naturales son, simplemente, las que muestra la siguiente tabla:

a	b		
3	6	....	Mosaico hexagonal
4	4	....	Mosaico cuadrangular
6	3	....	Mosaico triangular

Una interesante propiedad que se debe resaltar es que la demostración anterior, por estar encuadrada estrictamente en el marco de la teoría de grafos, no depende de ninguna propiedad geométrica (distancias, ángulos, paralelismos, etc.) relativa a

las figuras generativas del mosaico. Por ejemplo, los siguientes mosaicos corresponden (salvo isomorfismo de grafo) a los tres tipos ya clasificados aunque su diferente apariencia geométrica induzca a pensar que son figuras especiales.

UNA FÓRMULA EN SELLOS

En este sello dedicado a Leonhard Euler, emitido por la antigua Alemania Oriental, se incluye un icosaedro y la fórmula $A - C + V = 2$ con las abreviaciones alemanas. Una forma simpática de enviar la fórmula por el mundo.

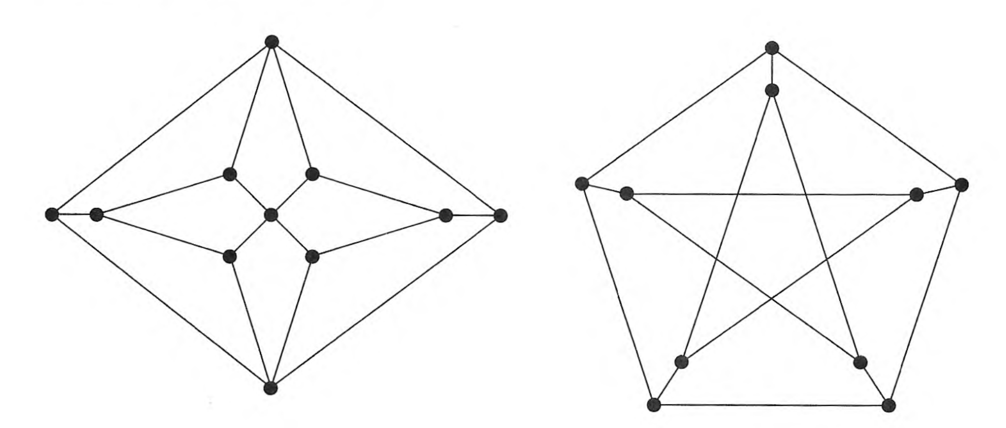


Otros problemas geométricos con grafos

Más allá de la fórmula de Euler y de todas sus maravillosas consecuencias para resolver problemas de geometría, existen también otras muchas cuestiones geométricas en las que la teoría de grafos es de especial interés. A continuación se citan algunos ejemplos.

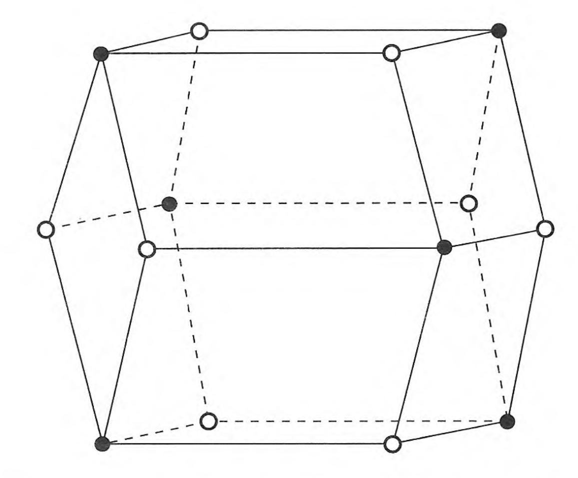
Circuitos de Hamilton en poliedros

Anteriormente se ha tenido ocasión de ver cómo el origen de la idea de Hamilton para considerar los circuitos que hoy en día llevan su nombre (partir de un vértice y regresar a él habiendo pasado por todos los vértices una sola vez) fue el juego de hallar el circuito en un dodecaedro. Esto motivó que años más tarde se buscaran circuitos hamiltonianos en todo tipo de poliedros o, si era el caso, se demostrara que no existían. En las figuras siguientes pueden verse los llamados grafos de Herschel y Peterson, que siendo bien simples no admiten circuitos de Hamilton (cosa que el lector puede llegar a intuir después de varios intentos desesperados de hallar con un lápiz algún circuito).



Pero pasemos al espacio tridimensional y siguiendo a H.S.M. Coxeter, consideremos la búsqueda de circuitos hamiltonianos en poliedros diferentes del dodecaedro. Un caso que resolvió Coxeter de forma muy inteligente fue el del rombododecaedro.

Un rombododecaedro tiene todas sus caras iguales, pero en cambio tiene vértices de dos tipos diferentes; por este motivo no es un poliedro regular.



Este interesante poliedro representado en la figura tiene, como su enigmático nombre ya indica, doce caras iguales que son rombos, con la peculiaridad de que posee 8 vértices que reciben 3 aristas (los marcados con círculos blancos) y otro 6 que reciben 4 aristas (los marcados con círculos negros). Obsérvese que los vértices blancos determinan un cubo y, por lo tanto, puede pensarse en el rombododecaedro como un cubo al cual se han añadido seis pirámides de base cuadrada. Así, el volumen de la figura es el doble del cubo inscrito y dicha figura, como el cubo, puede llenar todo el espacio por repetición, como un mosaico en el espacio tridimensional.

¿Existe un circuito de Hamilton en el rombododecaedro? Ésta es la cuestión que Coxeter responde con un rotundo no en base a un genial argumento: si hubiese un circuito de Hamilton, partiendo y acabando en un vértice, deberíamos recorrer

H.S.M. COXETER (1907-2003)

Harold Scott MacDonald Coxeter nació en Londres y estudió matemáticas en el Trinity College de Cambridge, aunque desarrolló toda su carrera académica en la universidad canadiense de Toronto, donde trabajó durante sesenta años. Se le considera uno de los grandes geómetras del siglo xx, habiendo escrito doce influyentes libros y multitud de trabajos junto a grandes eminencias de la geometría. El estudio de los poliedros y del caso de poliedros en espacios de dimensión superior a tres le debe contribuciones extraordinarias. Coxeter tuvo gran amistad con el famoso artista holandés M. Escher, el cual recibió de él grandes sugerencias para convertir en arte muchas propiedades que Coxeter había ideado.

los 14 vértices una sola vez, pero cada vez que se va de uno a otro hay un cambio de color (de blanco a negro o de negro a blanco). Esta alternancia de colores en el recorrido no es posible pues hay 6 vértices negros y 8 blancos.

Grafos en superficies no planas

Si bien los grafos surgen de forma natural con modelos asociados a esquemas dibujados en un plano, tanto los problemas de coloración de grafos como los de planitud motivaron el estudio de grafos situados en otras superficies, como esferas, toros, cilindros, etc. Los esquemas también fueron situados en dimensión tres, como es el caso del estudio de nudos y su clasificación.

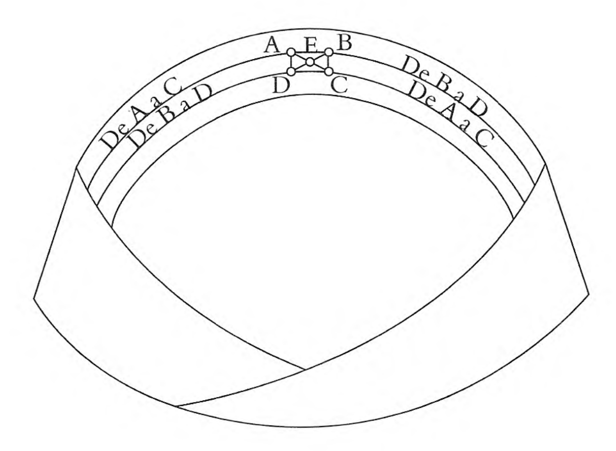
Los grafos en diferentes superficies han ayudado a la formulación de muchas propiedades topológicas que son invariantes por deformaciones continuas y ayudan a clasificar curvas y superficies. Imagínese, como hemos dicho antes, un globo hinchado en cuya superficie se dibuja un grafo con rotulador. Si se empieza a apretar el globo deformándolo (sin romperlo) se observará que las características del grafo se mantienen (número de vértices o aristas, número de aristas incidentes en cada vértice, etc.).

Otro ejemplo de grafo situado en una superficie muy peculiar es el de la cinta de Möbius. En el plano, si se tienen cuatro puntos y se quiere trazar un grafo que una cada uno de los puntos con los otros tres y que sea plano, no hay dificultad, pues colocando los cuatro puntos como vértices de un rectángulo, uniendo dos opuestos por una diagonal y los otros dos, por una línea exterior al cuadrilátero, el problema queda resuelto. Pero con cinco puntos ya no es posible unir cada uno con los otros cuatro sin que se produzcan cruces indeseables entre las aristas (¡el $K5$ no es plano!).

La cinta de Möbius se puede representar mediante una tira larga rectangular de papel, pegando los dos lados cortos después de haber girado en el espacio la cinta antes de pegarla. Si no se gira y uno se limita a pegar los lados paralelos obtendría un cilindro, pero gracias a su construcción la cinta de Möbius tiene la curiosa peculiaridad de tener una sola cara. En el cilindro, el espacio queda dividido en una parte interior y en otra exterior, pero en la cinta esto no pasa: no hay dos caras, sino una.

¿Es posible dibujar un grafo en esta superficie, con cinco puntos y cada punto unido con los otros cuatro? El siguiente esquema de Miguel de Guzmán demuestra que lo que fue imposible en el plano, es posible en la cinta de Möbius.

Miguel de Guzmán siempre consideró que los juegos y los retos eran esenciales en matemáticas.

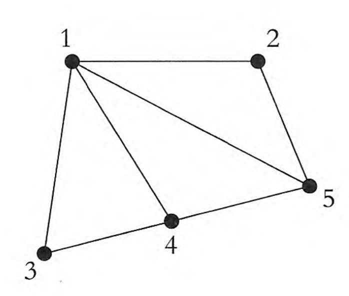


Dibujemos los cinco puntos *ABCDE* en la cinta siendo *ABCD* un rectángulo y *E* su centro, unido ya a los cuatro vértices. A lo largo de la cinta (¡que tiene una sola cara!) se puede trazar la línea de *B* a *D* y la de *A* a *C* tal como se indica en la figura anterior. Cada uno de los cinco puntos ha quedado bien conectado.

Geometrías finitas

Imagine una plantación con diversas filas de árboles o de vegetales. El esquema geométrico con que usted representaría esta situación es evidentemente un grafo formado por una serie de puntos, sin aristas. Pero suponga que deben planearse los vuelos de una avioneta que fumigue bien todo lo plantado, o que son uvas que una máquina ha de recoger, etc. Las posibles «aristas» del grafo servirían ahora para pensar en trayectorias posibles de fumigación o recogida.

Muchos son los problemas que han suscitado el interés por las *geometrías finitas*, es decir, los sistemas geométricos en los que sólo hay un número finito de puntos y unas líneas que consisten en ciertas colecciones de estos puntos.



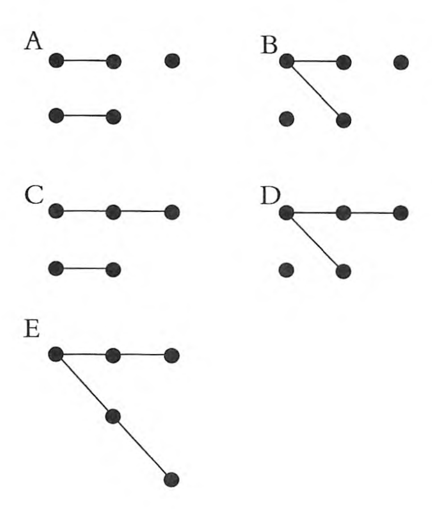
En la figura anterior se representa mediante un grafo una geometría finita que consiste en cinco puntos 1, 2, 3, 4, 5 y las «líneas» formadas por los puntos: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$. Como ya puede apreciar en este ejemplo la conexión entre grafos y geometrías finitas es obvia.

De la misma manera que en la geometría tradicional con puntos y rectas infinitas se puede seguir la tradición griega iniciada por Euclides y dar una serie de axiomas o propiedades que se toman como punto de partida, también en las geometrías finitas se pueden dar axiomas de tipo diverso y seguir hablando de incidencia (punto común) o paralelismo (líneas sin punto común), etc.

Observe el siguiente ejemplo de sistema axiomático de una geometría finita:

I. Hay cinco puntos y dos líneas.
II. Cada línea contiene al menos dos puntos.
III. Cada línea contiene como máximo tres puntos.

Con estas reglas de juego se deben describir cuáles son las posibles configuraciones. Pero en lugar de describir los conjuntos resultantes con letras y palabras, resulta mucho más fácil hacer los posibles grafos con cinco puntos y sus aristas pertinentes. En la siguiente figura puede observar todas las configuraciones posibles.



Para apreciar el interés práctico de este ejemplo piense ahora en que los puntos son personas de una junta directiva de una asociación y que las líneas son comités

formados por dos o tres miembros de la junta. Reformule entonces los axiomas anteriores en un lenguaje de reuniones:

I. Hay cinco personas y dos comités.
II. Cada comité tiene al menos dos personas.
III. Cada comité tiene como máximo tres miembros.

Obviamente la cosa puede complicarse con muchos puntos y muchas líneas.

CLASIFICACIONES Y JERARQUÍAS

De la misma manera que en la geometría más tradicional se presta especial atención a las clasificaciones de figuras (triángulos, cuadriláteros, etc.), el tema de las clasificaciones tiene hoy en día un renovado interés al surgir problemas de clasificación en los temas más diversos: clasificación de formas en técnicas de visión por ordenador, clasificación de genes, clasificación de síntomas en enfermedades, etc. Aparecen problemas de clasificación en seguridad (huellas digitales, iris, voz, etc.), en la producción industrial donde el control de calidad desea que de forma automática las piezas defectuosas sean detectadas y retiradas de la cadena de producción, etc.

En el caso de conjuntos finitos una *relación* siempre viene dada por un conjunto de pares de elementos, y tanto puede recurrirse a visualizar las relaciones mediante diagramas de conjuntos como mediante grafos, en los que los vértices se asocian a los elementos y las aristas del grafo unen elementos relacionados. Las relaciones que permiten clasificaciones son las denominadas *relaciones de equivalencia*, a las cuales se exigen las siguientes propiedades: ser reflexivas (todo elemento esta relacionado con él mismo), ser simétricas (si a esta relacionado con b, b lo está con a) y ser transitivas (si a está relacionado con b y b lo está con c, también a estará relacionado con c). El grafo asociado a estas relaciones deberá reflejar tales propiedades.

Otro tipo de relaciones son las de *orden*, que sirven para ordenar elementos y verifican las propiedades reflexiva, transitiva y anti-simétrica (si a está relacionado con b y b con a, debe ser $a = b$). Los grafos correspondientes a esta relaciones de orden en conjuntos finitos pueden ser dirigidos (con arcos o flechas) para indicar cuándo un elemento es menor que otro o bien tener aristas no orientadas, pero entonces se acordará que el grafo se interpretará de abajo arriba para establecer el orden. También son de interés los procesos jerárquicos en los que se deben establecer unas prioridades u ordenar la realización de determinadas iniciativas (inversiones, obras, localización de servicios públicos, etc.). En todos estos ámbitos la teoría de grafos ayuda a entender el problema y a facilitar su resolución.

Capítulo 5

Aplicaciones sorprendentes de los grafos

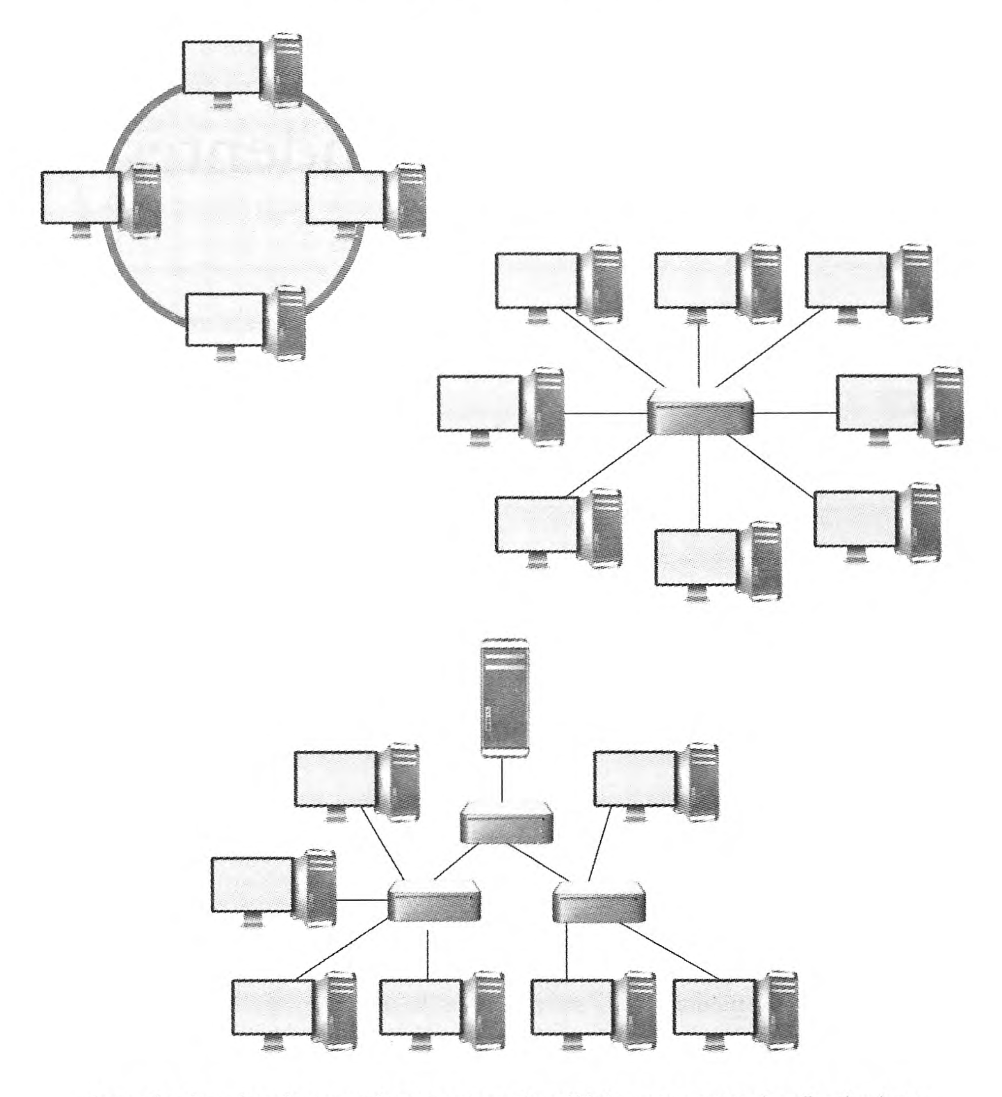
Si la gente no cree que las matemáticas son simples es sólo porque no se da cuenta de lo complicada que es la vida.
John von Neumann

Muchos han sido los usos de los grafos que se ha tenido ocasión de ver en las páginas anteriores. En este último capítulo (y con la esperanza de que después de él usted ya tenga una sana adicción a los grafos y siga indagando por su cuenta) se apuntan brevemente otras aplicaciones que son menos esperables que mapas, rutas o árboles genealógicos.

Grafos e Internet

Se ha dicho en diversas ocasiones que la denominación Edad de piedra es poco adecuada y que hubiese sido más acertado hablar de la Edad de los hilos, ya que más allá del uso de piedras como herramientas lo que fue muy importante fue la decisión de unir estas piedras con palos mediante hilos. En nuestra época, la «red de redes», Internet, ha posibilitado la revolución digital al conectar ordenadores y servidores a escala mundial. Las computadoras fueron evolucionando en potencia (y disminuyendo en tamaño), pero lo que ha permitido un salto colosal en la digitalización del mundo han sido las conexiones. Aquí grafos y telecomunicación han ido siempre de la mano.

A pesar de que el ingenio humano permitiera construir los primeros ábacos y las míticas primeras máquinas para calcular, era imprevisible que disciplinas tan sofisticadas como la cibernética y la computación llegaran tan pronto a incidir en el complejo y diverso mundo de la comunicación. Sin duda, se ha tratado de un salto enorme realizado en muy poco tiempo.



Las redes de ordenadores pueden conectarse de múltiples maneras y todas ellas dan lugar a un determinado tipo de grafo, como la red en anillo (arriba a la izquierda), la red en estrella (arriba a la derecha), o la red en árbol (al lado).

En las figuras anteriores pueden apreciarse distintas configuraciones de unos cuantos ordenadores conectados entre sí. Todas tienen detrás un grafo asociado (ciclo, árbol, estrella...) y por eso se habla de «topologías de redes».

Cada tipo de conexión de una empresa o sector repercute en el rendimiento y la funcionalidad de la red, debiéndose distinguir el grafo físico de distribuciones de máquinas, cableados, etc., de otras potencialidades, como es la forma de comu-

nicación entre máquinas (Ethernet, Token Ring, etc.) y los nodos y enlaces que se establecen. Aún estamos al principio de un proceso de evolución imprevisible.

Lo que en un principio fue un ensayo de correos electrónicos para usos militares se extendió luego al nivel universitario y posteriormente, a todo el planeta de internautas. La aparición de las webs y de los buscadores ha permitido acceder a este complejo mundo de conexiones y consultas, de *links* que guían el camino: un grafo subyacente de dimensión sorprendente (y sigue creciendo).

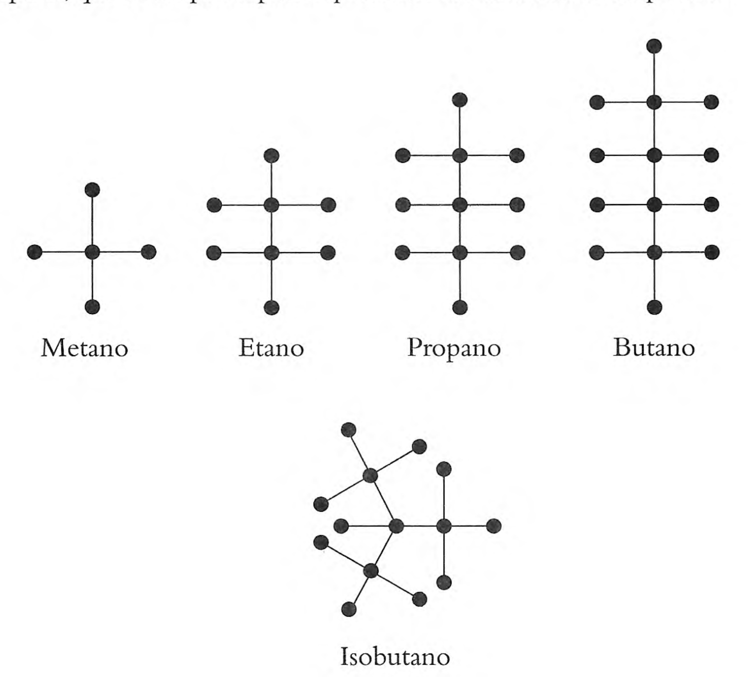
Consultando un buscador como Google hoy en día es posible acceder a la información más enorme que nunca haya existido. Pero para evitar el caos total, Google ha empleado un rastreador de páginas web (el Googlebot) y se ha dotado de algoritmos complejos para *ordenar las apariciones* de los ítems buscados. La siguiente descripción de la propia casa Google da una visión detallada de cómo se elaboran las ponderaciones y las ordenaciones resultantes que aparecen en las consultas a través del buscador (PageRank):

> «PageRank aprovecha la característica excepcionalmente democrática de la Web, al utilizar su amplia estructura de vínculos como una herramienta de organización. Fundamentalmente, Google interpreta un vínculo de la página A con la página B como un voto de la página A por la página B. Google evalúa la importancia de una página por los votos que ésta recibe. Pero Google considera más que simplemente el volumen de votos o los vínculos, también analiza la página que emite el voto. Los votos emitidos por páginas que son "importantes" tienen mayor ponderación y ayudan a hacer que otras páginas sean también "importantes".
>
> »Estos resultados valiosos y de alta calidad reciben un PageRank superior y son colocados más arriba al ordenar los resultados. De esta forma, PageRank es el indicador general de importancia de Google y no depende de una consulta específica. Más bien se trata de la característica de una página, basada en datos de la web que Google analiza utilizando algoritmos complejos que evalúan la estructura de vínculo.»

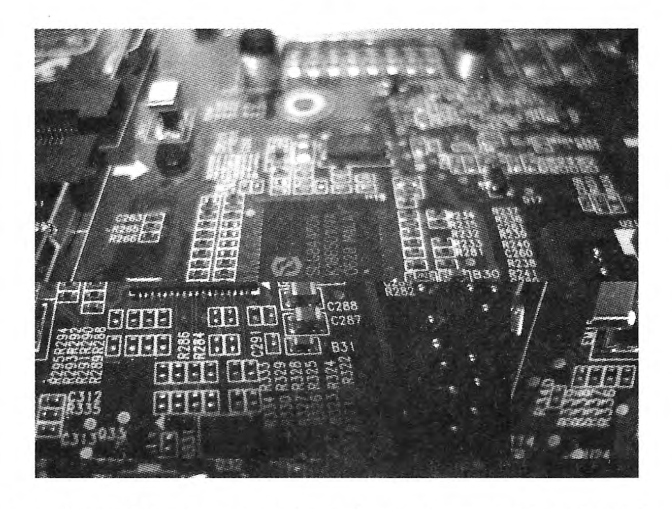
Grafos en química y física

Los grafos tienen gran interés en la representación de estructuras especiales de moléculas y en el estudio de éstas. A la complejidad molecular o a los isómeros químicos les viene bien la simplicidad de los grafos para entender los enlaces.

Cualquiera que haya estudiado química orgánica sabe bien cómo usar grafos en esta disciplina, que se emplean para representar los diferentes compuestos:



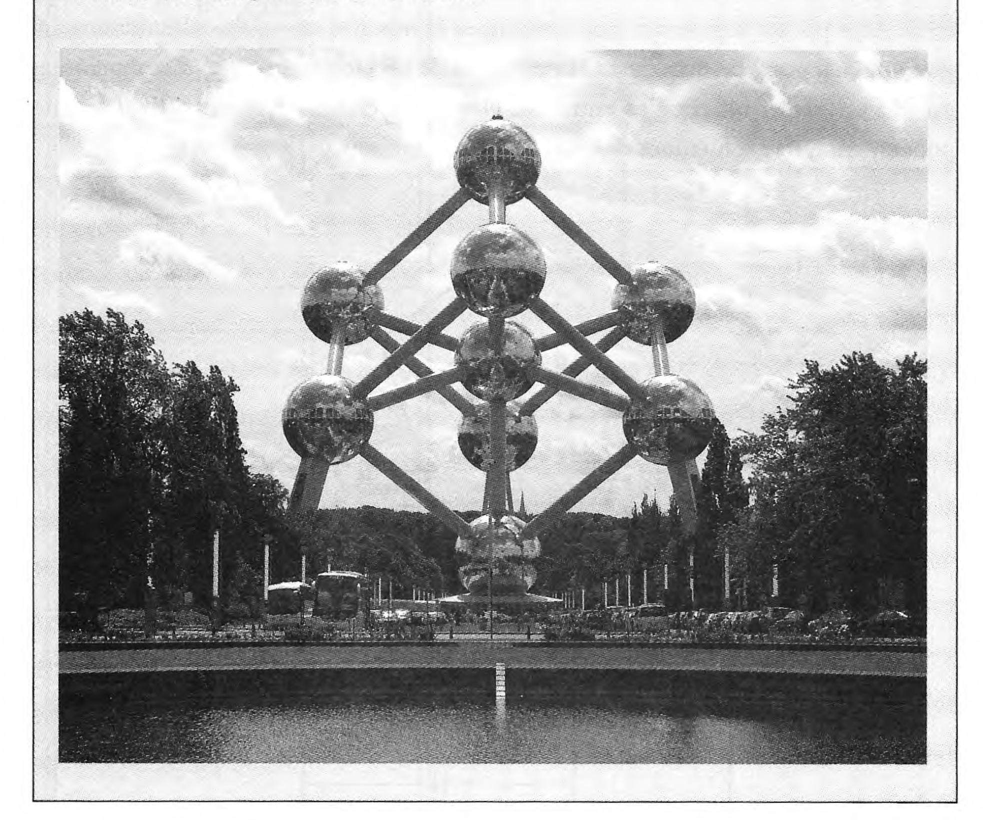
En diversas ramas físico-tecnológicas se usan también grafos, siendo los circuitos eléctricos y los circuitos integrados aplicaciones bien conocidas.



Los grafos también están presentes en los modernos circuitos electrónicos.

UN GRAFO DE 2.400 TONELADAS

Para la Exposición Universal de 1958, celebrada en Bruselas, se construyó el Atomium, una impresionante estructura de acero de 103 metros de altura. Para su diseño, el ingeniero André Waterkeyn se inspiró en el grafo que representa la molécula del hierro con 9 esferas (de 18 metros de diámetro) y 20 tubos de conexión.

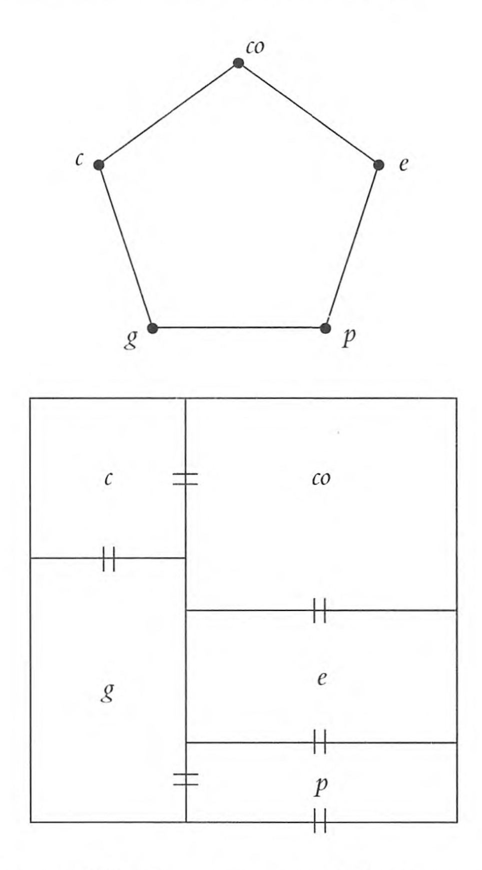


Grafos en arquitectura

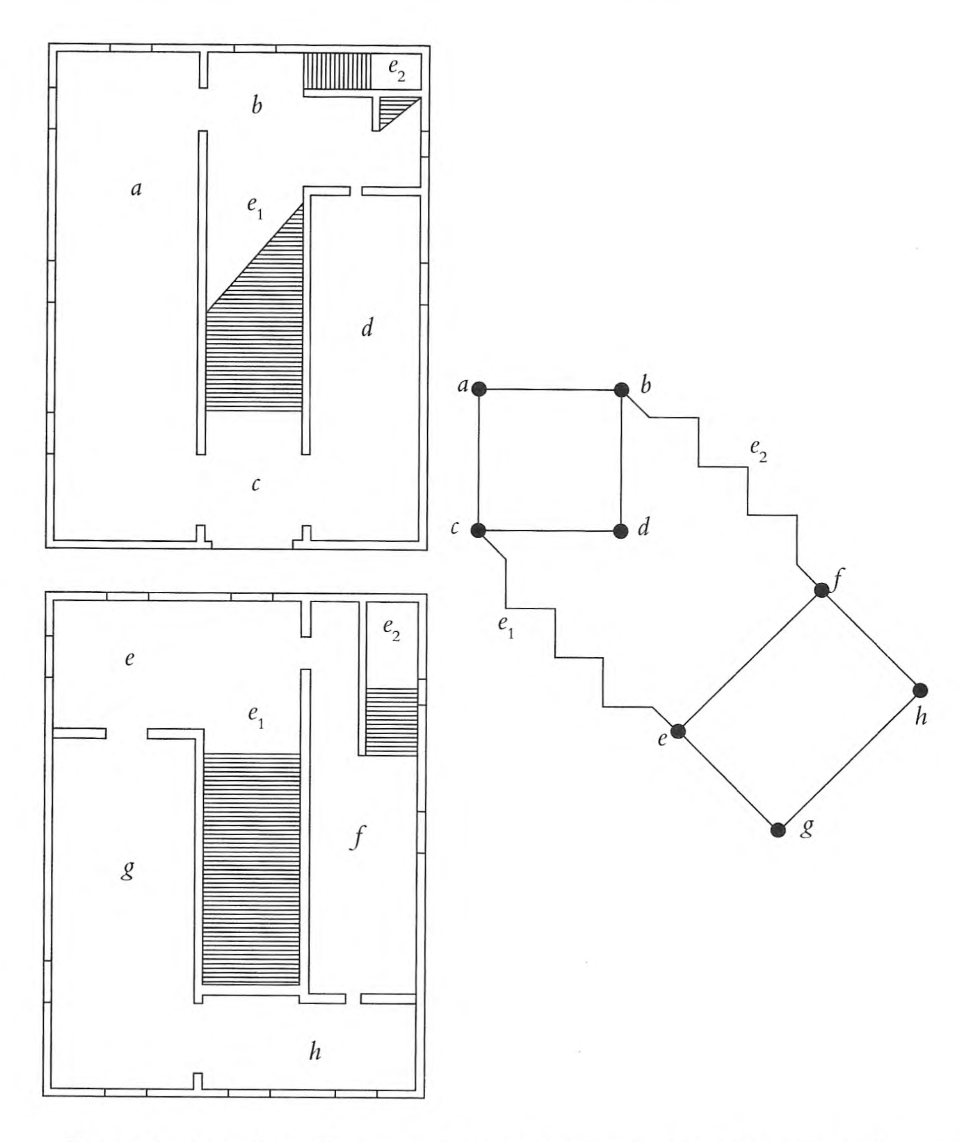
En las diferentes etapas de concreción de un proyecto arquitectónico la teoría de grafos supone un eslabón clave. Una vez perfiladas las partes o elementos que formarán el proyecto, y antes de proceder al trazado de los primeros croquis, es sumamente clarificador trazar el *grafo de relaciones entre los elementos prefijados*. Por supuesto, diferentes tipos de relaciones: acceso físico (puertas), acceso visual (ventana, cristal...), pared común, etc., llevan a realizar diversos grafos sobre un mismo conjunto de elementos: *tantos grafos como tipos de relaciones*. Veamos algunos ejemplos simples.

En la planta baja de una vivienda unifamiliar (cuya forma es cuadrangular) se pretenden distribuir los siguientes elementos: una cocina (*c*), un comedor (*co*), una sala de estar o *living* (*e*), un espacio de circulación o pasillo (*p*) y un garaje para un coche (*g*). Se pretende que existan los siguientes accesos: garaje a cocina, cocina a comedor, comedor a *living*, *living* a pasillo y pasillo a garaje.

Si simbolizamos por puntos los elementos *c, co, e, p* y *g* y trazamos como aristas entre estos puntos segmentos que simbolicen la relación «acceso a» obtendremos el grafo, el cual pone de manifiesto la existencia de un ciclo: con dicha distribución es posible establecer un circuito entre dos elementos cualesquiera. A partir del grafo pueden ensayarse soluciones diversas a nivel de croquis.



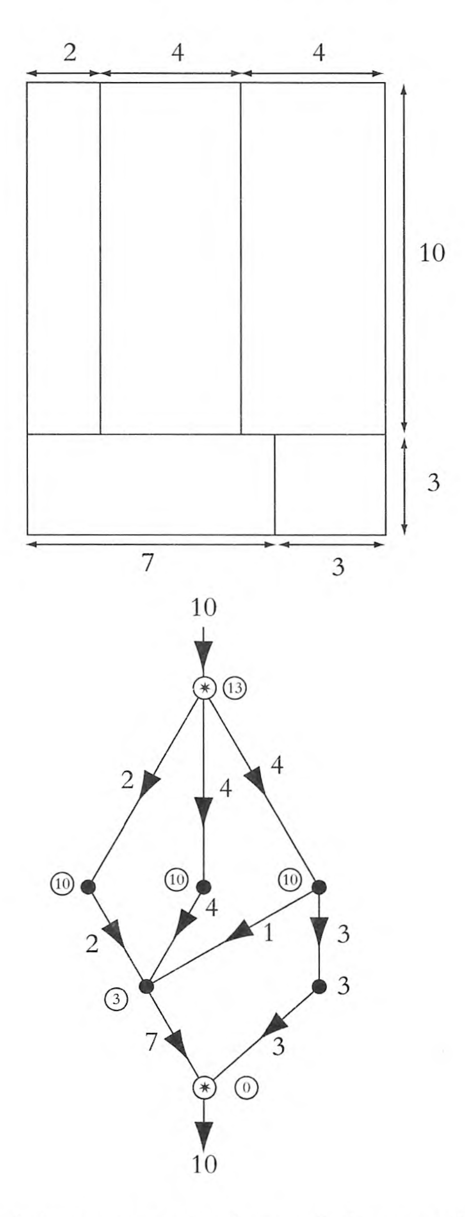
Pueden marcarse también los puntos que indican espacio exterior o escalera comunicante. En el caso de viviendas de varias plantas, a cada una se asocia su grafo de accesos o adyacencias y se unen los puntos accesibles de las distintas plantas, no con un segmento, sino con una línea quebrada que indique las escaleras.



El estudio de grafos en lugares de interés público puede aclarar siempre el grado de accesibilidad de los distintos departamentos, la correcta situación de los servicios y las instalaciones (bar, biblioteca, cine, escaleras de incendio, etc.).

Una vez realizado un grafo de adyacencias y un croquis dimensionado, a dicho croquis puede asociarse un *grafo evaluado de dimensiones* con el criterio que se expone a continuación.

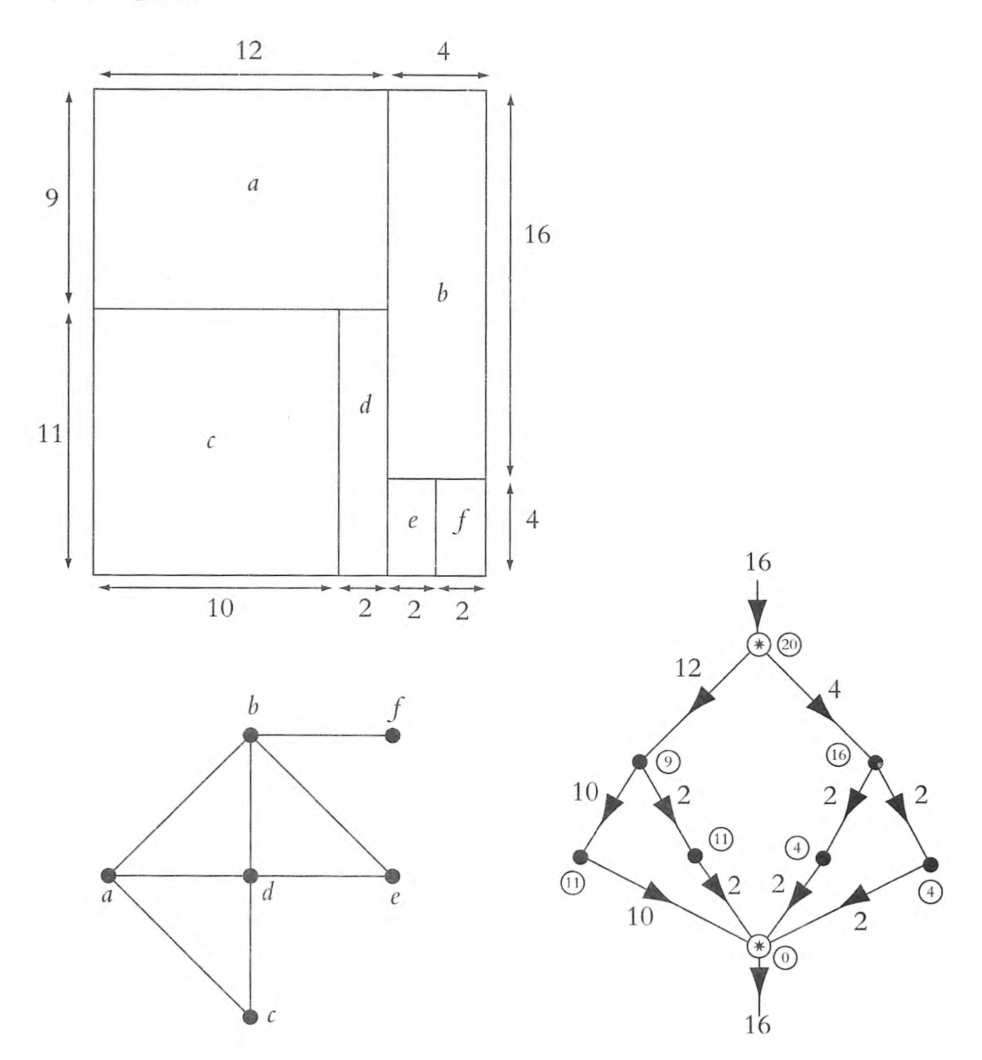
Note que nuestros ejemplos son muy simples. Donde estos grafos tienen especial interés es cuando hay complejidad, y se agradece la simplicidad de análisis.



Se marcan tantos vértices como trozos de paredes horizontales haya, más dos vértices especiales (al principio y final), escalando todos los vértices de arriba abajo. De cada vértice salen aristas (dirigidas hacia abajo), en las que se coloca el dimensionado de las paredes horizontales. En cada vértice se sitúa en un círculo el dimensionado vertical que queda entre la pared asociada al vértice y la siguiente por debajo. En el vértice inicial se coloca la dimensión horizontal total (en la arista entrante)

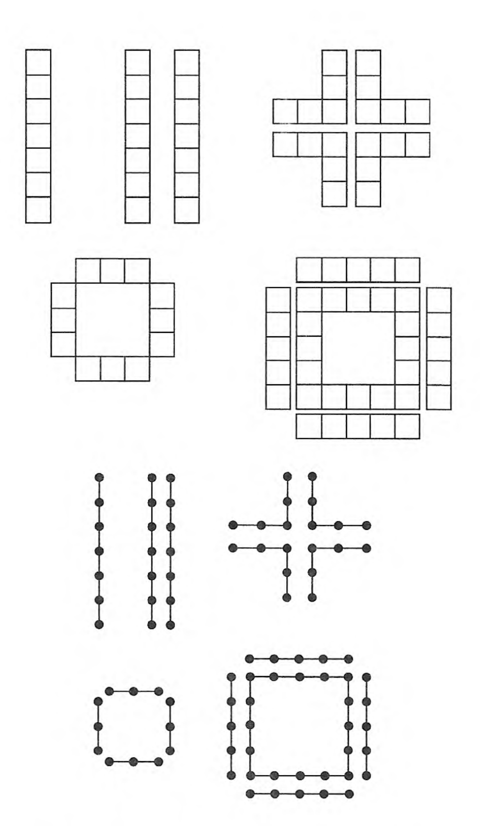
y la dimensión vertical total en un círculo adjunto. En el vértice final la dimensión vertical debe ser cero y la arista saliente debe tener la dimensión horizontal total. Nótese que el grafo no es correcto si la suma de valores salientes de cada vértice no es igual a la suma de los valores entrantes. Un interés de estos grafos dimensionales es verificar si la repartición de dimensiones interiores es correcta.

Otro ejemplo de adyacencias y su grafo dimensional es el que muestran las figuras siguientes.



Un tipo de grafo evaluado interesante en arquitectura corresponde a la teoría de *grafos de distancia efectivas* entre elementos comunicantes. Dicha teoría, desarrollada muy

especialmente por T. Tabor, puede describirse genéricamente como el estudio de las distribuciones «óptimas» de elementos arquitectónicos que minimizan los problemas de recorrido. Si bien a pequeña escala dicho problema carece de interés, a gran escala (como por ejemplo en una distribución en planta de un complejo de oficinas interdependientes pertenecientes a un banco, un ministerio, un ayuntamiento, etc.) el análisis de «rutas usuales» puede llevar a una reagrupación específica que facilite tales comunicaciones. Por ejemplo, al distribuir oficinas de igual tamaño en una planta pueden proponerse los siguientes cinco esquemas y sus equivalentes a los grafos de «contigüidad».



Al estudiar todas las distancias posibles entre pares de oficinas (usando la distancia real de recorrido y no la distancia geométrica euclídea) pueden obtenerse criterios sobre cuál de las cinco distribuciones *minimiza* los desplazamientos. En los experimentos de Tabor se supone una media de recorrido normal de 1,5 m/seg. en planta y 0,3 m/seg. en escaleras. Estos principios mínimos han sido aplicados en urbanismo (grandes centros comerciales, islas de peatones, densidad en las redes de tráfico, etc.).

UN PROBLEMA ABIERTO

Un problema abierto de teoría de grafos, cuya motivación ha sido arquitectónica, es el de la disección exacta de un cuadrado en rectángulos (trazando sólo líneas horizontales y verticales), determinando en cada caso todas las subdivisiones posibles y no equivalentes.

Nótese que este problema no es encontrar todos los grafos finitos posibles, sino aquellos que correspondan a una disección plana plausible. Si n indica el número de rectángulos en que se quiere dividir el cuadrado, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 se ha calculado que existen, respectivamente 1, 1, 2, 7, 22 y 117 formas diferentes de subdivisiones no equivalentes topológicamente. Para $n \geqq 7$ el problema de la descripción exhaustiva de tales subdivisiones está aún abierto (se estima por ejemplo que para $n = 7$ podrá haber alrededor de 700 soluciones, para $n = 8$ unas 10.000 y para $n = 9$ unas 250.000, pero tales extrapolaciones están pendientes de verificación). Este tipo de problemas se relaciona hoy con la creación de algoritmos capaces de resolver la cuenta de todas las posibles soluciones mediante ayudas computacionales.

Grafos en urbanismo

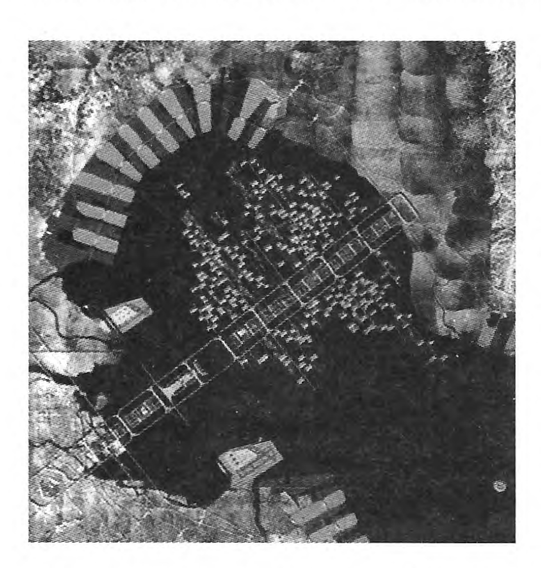
Christopher Alexander es un conocido arquitecto y profesor americano que en los años setenta del siglo XX difundió sugestivas ideas sobre cómo los grafos, los programas informáticos y los recursos cuantitativos actuales podían ayudar a racionalizar los procesos de análisis urbanísticos o los diseños de formas en arquitectura. Su libro *La síntesis de la forma* alcanzó gran popularidad, incluyendo grafos en el estudio de

estas formas. Pero fue especialmente importante su artículo *La ciudad no es un árbol*, en el que usando los árboles de la teoría de grafos como metáfora Alexander discutió el tema de los crecimientos urbanos, lanzando la críptica expresión:

> «Creo que una ciudad natural tiene la organización de un semiretículo... Cuando organizamos artificialmente una ciudad, lo hacemos como un árbol»

Alexander formuló las distinciones entre ciudades naturales y ciudades artificiales en base al análisis de las estructuras de semirretículos y árboles: asimilada la idea de ciudad a la de «sistema» complejo en el que entre diferentes unidades, subunidades y supraunidades se establecen relaciones jerarquizadas, Alexander considera que en las ciudades naturales se da un uso común a zonas, objetos o comunicaciones que son comunes a dos o más partes del sistema, mientras que en las ciudades artificiales no se da este uso común, pues la superposición de dos unidades de las mismas no determina una subunidad común utilizable.

Un ejemplo puede aclarar estas distinciones: en universidades centenarias sitas en la parte céntrica de una ciudad, las bibliotecas, las tiendas y los alojamientos de los estudiantes y profesores acostumbran encontrarse en las cercanías de la universidad, pero mezcladas con otros edificios de la ciudad: la vida universitaria se desarrolla en interacción constante con la vida ciudadana normal; tiendas, semáforos, parques, etc., son elementos usados por toda la comunidad. En núcleos universitarios modernos el campus universitario acostumbra organizarse autónomamente en una zona propia. Esto conlleva una subdivisión del campus en zona residencial, zona comercial, zona de universidad, etc. La vida universitaria queda así sometida a una jerarquización de espacios, a una distinción de usos y a un aislamiento de comunidades que no participan de un espacio físico común.



La bahía de Tokio según el proyecto del arquitecto japonés Kenzo Tange (1960).

Proyectos de ciudad típicamente arborescentes han sido por ejemplo los de Abercrombie y Forshaw para

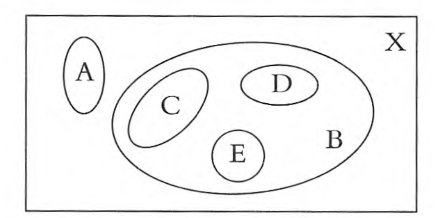
la planificación del Gran Londres; el de Kenzo Tange para Tokio, el de Lúcio Costa para Brasilia, el de Le Corbusier para Chandigarh, etc.

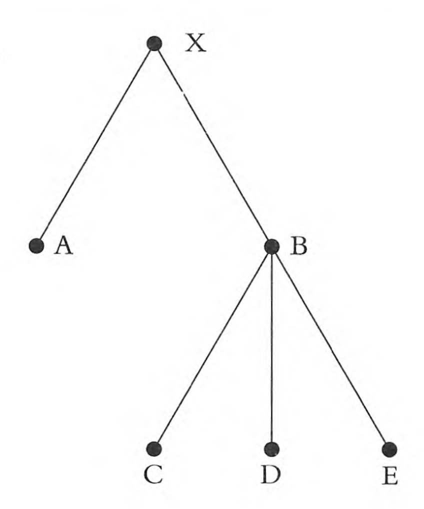
En definitiva, Alexander llega a la conclusión de que debe buscarse más la estructura compleja de la ciudad que la estructura de árbol:

> «En la mente humana, el árbol es el vehículo más fácil para elaborar ideas complejas. Pero la ciudad no es, no puede ser y no debe ser un árbol. La ciudad es un receptáculo de vida.»

Grafos en redes sociales

Los grafos también son un valioso instrumento en ciencias sociales, especialmente en estudios sociológicos, antropológicos, geográficos, económicos, de comunicación, de psicología social, etc., que analizan redes sociales: una estructura social se representa por nodos de un grafo (personas, organizaciones, comunidades, grupos...) y las aristas entre estos nodos indican las relaciones pertinentes (organización, dependencias económicas, niveles de decisión, comunicaciones...).





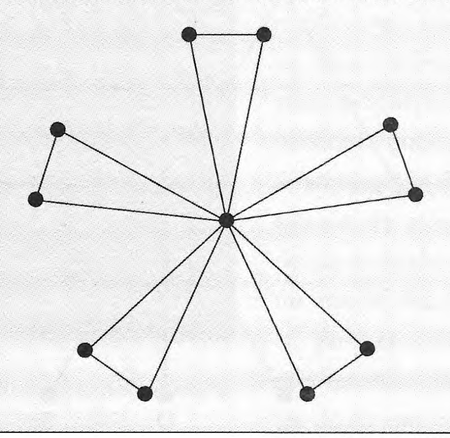
A menudo las redes sociales son complejas y, por lo tanto, el grafo correspondiente permite visualizar y entender problemas de relaciones entre actividades, grupos empresariales, barrios, etc. Hoy en día también aparecen grupos de webs de Internet, webs corporativas, comunicaciones en la red de redes, etc.

La idea de estudiar redes sociales se remonta al siglo XIX (Émile Durkheim y Ferdinand Tönnies) y se fue desarrollando intensamente durante el siglo XX a partir de las consideraciones de Georg Simmel. En los estudios pioneros se consideraron temas como las relaciones laborales entre grupos o personas de una empresa, temas de distribuciones urbanas, relaciones entre comunidades culturales, etc., hasta alcanzar en la segunda mitad del siglo una expansión en todos los ámbitos de análisis sociales. Los grupos de las universidades de Harvard (Harrison Whitie, Talcott Parsons), de California (Linton Freeman), Chicago, Toronto, etc., han sido referenciales en este campo.

Entre las aplicaciones de estos análisis de redes sociales pueden citarse los estudios de epidemiología o propagación de enfermedades (SIDA, malaria, tuberculosis...), de difusión de innovaciones, los análisis de impactos políticos, e incluso la difusión de rumores y opiniones.

LOS AMIGOS DEL POLÍTICO

En el folclore matemático circula desde hace años el siguiente problema: supongamos que en un grupo de personas (al menos tres) cualquier par de personas tiene exactamente un amigo común. Entonces hay siempre una persona (llamada «el político») que es amiga de todos los del grupo. Paul Erdös, Alfred Rényi y Vera Sós formalizaron y resolvieron este problema usando grafos: si en un grafo hay n vértices ($n \geq 3$) y para cualquier par de vértices hay un vértice adyacente a los mismos, entonces debe haber un vértice adyacente a todos los demás.



A partir de los grafos que visualizan la red social que hay que analizar se introducen evaluaciones cuantitativas, muchas de ellas respaldadas por programas informáticos, estudiándose parámetros tales como grados de dependencia y cercanía, grados de centralidad, flujos entre nodos, cohesión, equivalencia, etc. Por ejemplo, la cohesión estructural es el mínimo número de miembros que si se quitaran de un grupo de la red social analizada dejarían al grupo desconectado de la red. Pueden evaluarse también intensidades de relaciones, probabilidades de pasar información, frecuencias de interacción, distanciamientos entre nodos, etc. Así, el estudio de la centralidad entre individuos o grupos es una artillería importante para dirimir eventos clave en una organización (tránsitos de información, jerarquías, liderazgo...). El cálculo de *índices de influencia* es otro cómputo interesante, ya sea a nivel político o comercial.

El «pequeño mundo» de Stanley Milgram

En 1967 el psicólogo Stanley Milgram llevó a término el denominado *experimento del pequeño mundo* consistente en elegir una muestra de ciudadanos y pedirles que hicieran llegar un mensaje (una carta, por ejemplo) a unas personas determinadas con la ayuda de sus conocidos, que irían transmitiendo el mensaje en cadena hasta alcanzar el objetivo. Resultó que, mayoritariamente, en seis pasos se lograba el enlace buscado. Este experimento se ha ido repitiendo muchas veces y parece confirmarse que el número de pasos en las cadenas siempre es muy pequeño (cinco, seis, ocho...). Con los *links* y correos electrónicos de Internet este tema ha adquirido además una popularidad renovada.

Grafos y horarios

En un mundo complejo como el nuestro uno de los temas cruciales es la necesidad de planificar muy bien todo tipo de horarios con vistas a optimizar el tiempo. «El tiempo es oro» es un principio omnipresente en nuestro entorno.

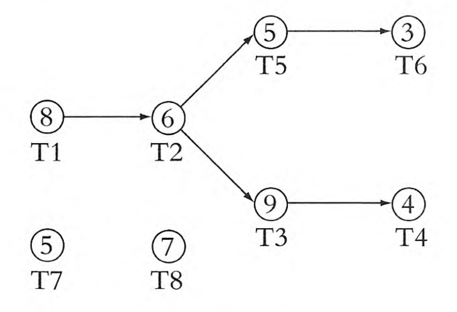
El motivo que mueve a esta búsqueda constante de la optimización temporal es aprovechar al máximo la labor de las personas trabajadoras, o de las máquinas involucradas en las acciones de transporte, de producción, de prestación de servicios, etc. Anteriormente ya se ha hecho referencia a situaciones complicadas como minimizar los tiempos aéreos entre la llegada y la salida de un avión o el caso de la planificación de obras en arquitectura. Aquí nos proponemos demostrar cómo el tema de grafos y tiempos tiene también su aplicación en situaciones más cercanas a nuestra vida.

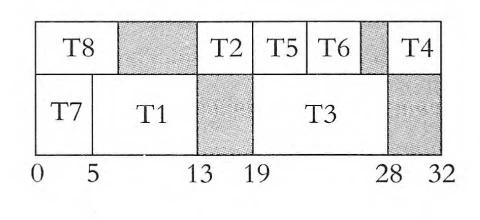
Piense en una acción cotidiana como puede ser realizar diversas compras de alimentos, preparar una comida y luego servirla. En la ejecución temporal de este programa usted podría pensar en los siguientes factores:

1. Enumerar todas las tareas y evaluar los tiempos que requieren cada una de ellas.
2. Analizar qué tareas son independientes entre sí (compras por ejemplo) y cuáles deben hacerse secuencialmente, en un orden determinado. En este paso es posible ayudarse de un grafo que incorpore como vértices las tareas con sus tiempos y como aristas líneas dirigidas (arcos o flechas) indicando el orden entre acciones.
3. Aplicar entonces, en función de las personas que van a colaborar y del número de máquinas disponibles (hornos, batidoras, ollas a presión...), un algoritmo que permita hacer en paralelo todo lo que se pueda (preparar la mesa, etc.) y en secuencia lo inevitable, pero optimizando el tiempo total.

Si recuerda el *algoritmo austero* que se ha visto en coloraciones de grafos, puede intentar aplicarlo a esta aventura gastronómica, en la que invertir el mínimo tiempo es el gran objetivo: ir asignando las tareas teniendo en cuenta su enumeración y secuenciación y los tiempos menores.

En la figura puede apreciarse un ejemplo genérico de tareas, tiempos, grafo dirigido y listado de programación suponiendo dos máquinas que actúan en paralelo.





Como entre todas las tareas necesarias hay unas que son más largas, una forma de programar éstas es seguir el *algoritmo de los tiempos decrecientes*, es decir, dar prioridad, siempre respetando la secuenciación, a lo que lleva más tiempo de ejecución (hervir el cocido, asar el pavo, etc.).

MATEMÁTICOS Y HUEVOS FRITOS

Una de las historias humorísticas más populares sobre la forma de pensar (y actuar) de los matemáticos hace referencia precisamente a cómo estos profesionales intentan optimizar todo lo que hacen en su vida, siguiendo algoritmos que lleven a hacer lo mínimo. Se cuenta que un matemático explicó con todo detalle el proceso para hacer un huevo frito: sacar la sartén del armario, encender el fuego, poner la sartén, echar aceite, calentar, echar el huevo, añadir sal, freír... La cuestión que se le planteó entonces a este matemático fue ¿y qué haría usted si el fuego ya estuviera encendido y la sartén en él? La respuesta del matemático se redujo a decir: «Se toma la sartén, se mete en el armario y se aplica el procedimiento anterior».

Como ya puede intuir, todo esto es un tema muy importante en ámbitos muy diversos, como los siguientes: cadenas de montaje de coches, de televisores, de ordenadores, etc.; imprentas y casas de fotocopiadoras con diferentes máquinas y empleados; la planificación del uso de quirófanos en un hospital, en las listas de espera para operaciones quirúrgicas, los horarios de médicos en urgencias, etc.; la distribución de canciones entre dos CD's musicales, los envíos informáticos, etc.; la organización de horarios y vacaciones en empresas con varios turnos; los horarios en hoteles y restaurantes; los horarios de metros, autobuses, trenes, aviones...

En todos los casos se persigue optimizar tiempos, con todo lo que ello implica sobre costes, calidad del servicio, eficacia de la organización, etc.

Naturalmente a veces no será el tiempo lo que más nos preocupe, sino otros factores como puede ser el espacio. Preparar las maletas, cargar los muebles en un camión de mudanzas, preparar un *container* para enviar mercancías a otro lugar..., son problemas en los que los grafos y los algoritmos pertinentes se pondrán al servicio de optimizar el espacio ocupado. Así, un *algoritmo de la siguiente posibilidad decreciente* sería una forma heurística de proceder empaquetando primero lo que más ocupa.

Problemas *NP*-completos

Todos los algoritmos descritos aquí para optimizar tiempos o espacios, al igual que ya se comentó en el caso del viajante de comercio, son muy difíciles de implementar a partir de cierta complejidad de datos y agentes. No siempre se puede garantizar que la propuesta a la cual nos lleve el algoritmo sea la mejor posible. Como to-



El matemático alemán David Hilbert.

dos los problemas que se califican de *NP*-completos, no parece factible que puedan encontrarse algoritmos de resolución rápida. Debemos confiar en nuestra capacidad para resolver problemas, mirando en cada caso lo mejor que podríamos hacer, sin confiar en que puedan aparecer algoritmos eficientes que una máquina pueda llevar adelante en tiempos razonables.

En 1900 David Hilbert propuso en el Congreso Internacional de Matemáticos de París una lista de los problemas que consideró más importantes para ser resueltos a lo largo del siglo XX. Cien años después, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, el Clay Mathematics Institute de Boston anunció premios de un millón de dólares para los que pudieran resolver cualquiera de los denominados problemas del milenio. Cabe notar que este prestigioso instituto-mecenas fue fundado en 1998, por Landon T. Clay, que es un conocido hombre de negocios admirador del mundo de las matemáticas (quizá por esto ofreció un dinero tentador para los problemas pendientes, en contraste con Hilbert, que en 1900 lo único que pudo ofrecer fue fama eterna para los que resolviesen sus problemas).

De los siete grandes problemas del milenio el número uno es precisamente el llamado problema $P = NP$. Este problema se enmarca en la llamada teoría de la complejidad computacional e involucra el análisis de los tiempos de computación necesarios para resolver un problema o verificar una solución.

Es posible que, motivados por el millón de dólares o simplemente por nobles deseos de progreso, esta búsqueda de algoritmos en grafos sirva también para incentivar el desarrollo de nuevas formas de computación, más allá de las posibilidades que el actual cálculo digital pueda proporcionarnos. La llamada computación cuántica, que en la actualidad es aún una simple especulación teórica, pudiera en el futuro abrir nuevas posibilidades efectivas de computación, ampliando «exponencialmente» los límites actuales. Como siempre, lo más interesante siempre está por venir.

Grafos recreativos

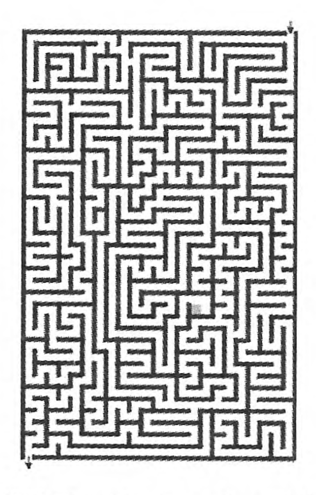
Muchos son los juegos que consisten en trazar grafos, o los que mediante grafos se analiza si existe una estrategia ganadora o no. Como botón de muestra y colofón a nuestro recorrido citamos algunos juegos históricos.

¿Quién dirá 20?

El primer jugador dice 1 o 2. Por turnos, los dos jugadores pueden ir sumando 1 o 2 al resultado anterior. Gana el que dice 20. ¿Es un juego con estrategia ganadora? ¿Y si en lugar de 20 es 83 o 100?

El laberinto del jardín de Rouse Ball

Rouse Ball ayudó a popularizar muchos conceptos gracias a sus divertidos escritos sobre matemática recreativa. En el famoso laberinto de Ball hay marcada la entrada-salida arriba y con un puntito el lugar del tesoro ¿se puede llegar a él? Inténtelo antes de mirar a la solución y seguir leyendo. ¿Lo encontró? El itinerario marcado tiene líneas y puntos de bifurcación. Cada arista debe recorrerse dos veces (ida y vuelta) y con los vértices de grado par el recorrido es posible y basta marcar en el suelo indicaciones de si ya hemos recorrido un trozo o no para no repetir en vano la excursión.

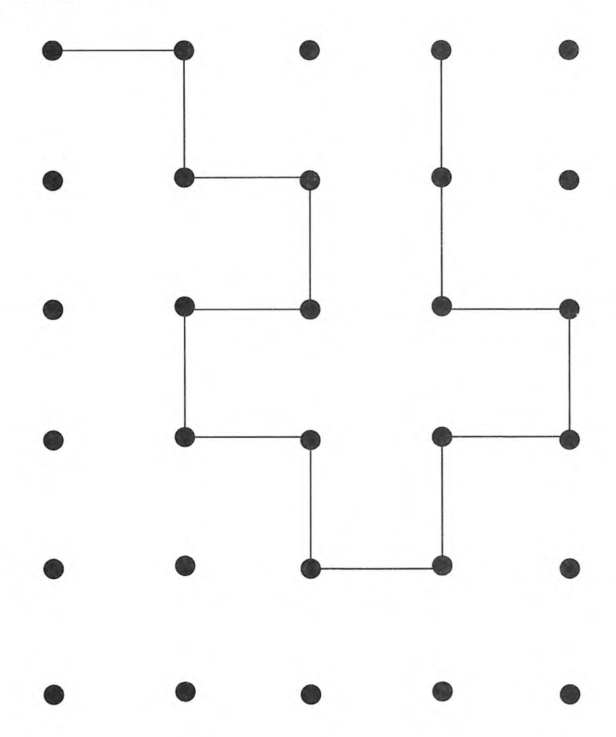


El laberinto ideado por Rouse Ball.

El juego del serpeo

Inventado por David L. Silverman, consiste en un retículo de puntos de 5 por 6 (o cantidades cualesquiera) en el que los jugadores a partir de cualquier punto van trazando por turno un segmento unitario (según las direcciones perpendiculares del retículo) formando un camino continuo, pudiendo añadirse segmentos en cualquiera de los extremos del camino precedente. Pierde la partida quien se ve obligado a cerrar el camino.

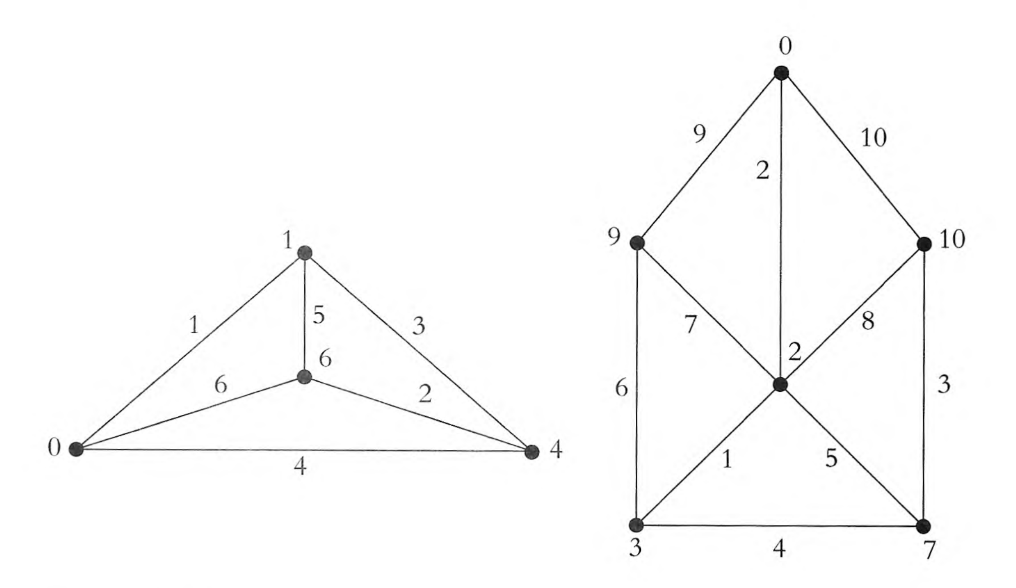
¿Hay estrategia ganadora?



La numeración garbosa de un grafo

Este juego de Solomon W. Golomb consiste en dibujar un grafo y asignar a sus vértices el cero y otros enteros positivos todos diferentes.

El juego debe resolverse de manera que las diferencias de valores entre vértices adyacentes que se coloquen en las aristas sean números todos diferentes y, al mmismo tiempo, lograr que el máximo de los números asignados a los vértices sea lo más reducido posible.



Torres de Hanoi

Inventado por Eduard Lucas en 1883 (y rodeado de falsas leyendas), consiste en tres varillas verticales en la que en la primera hay *n* discos diferentes (con un agujero en el centro) colocados de mayor a menor de forma ascendente. Nunca un disco se puede colocar sobre uno menor. Se trata de hacer movimientos de discos en las varillas hasta lograr tener la misma torre de partida situada en la tercera varilla. Sólo se mueve un disco cada vez y debe estar situado arriba.

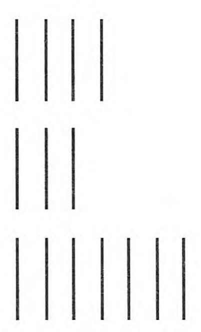


La posición de inicio en el juego de las torres de Hanoi.

El número de soluciones para *n* discos es $2^n - 1$, un número que crece muchísimo. Puede usar grafos para ayudarse a ver patrones de movimientos de discos. En la actualidad, hay webs interactivas en Internet sobre este juego.

Juego del NIM

Dos jugadores colocan varios grupos separados de fichas en filas. El primer jugador toma de una fila entre 1 y todas las fichas. A continuación, el segundo jugador toma fichas de una de las filas restantes. Y así por turnos. Gana el que retira la última ficha.

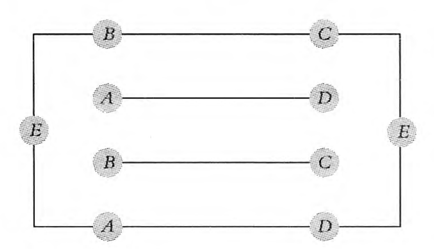


Dos circuitos de Martin Gardner

Fascinado por los grafos planos, Martin Gardner propuso y/o resolvió numerosos problemas para deleite de sus lectores en todo el mundo. Pensando en divulgar la aplicación de los grafos planos a los circuitos, Gardner ya argumentó que este caso de los circuitos era un buen ejemplo en el que las uniones entre los diversos puntos (vértices) debían hacerse mediante líneas que formaran un grafo plano, evitando cruces que provocarían cortocircuitos. El lector queda invitado a resolver los siguientes retos (antes de consultar sus soluciones al final del capítulo).

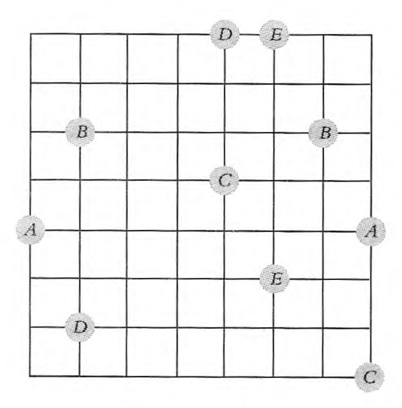
El circuito en un rectángulo

En este rectángulo (y sin salir de él) deben trazarse cinco líneas continuas que unan *A* con *A*, *B* con *B*, *C* con *C*, *D* con *D*, y *E* con *E*, sin cruzar en ningún caso los segmentos *AD* y *BC* marcados en la figura.



El circuito en la cuadrícula

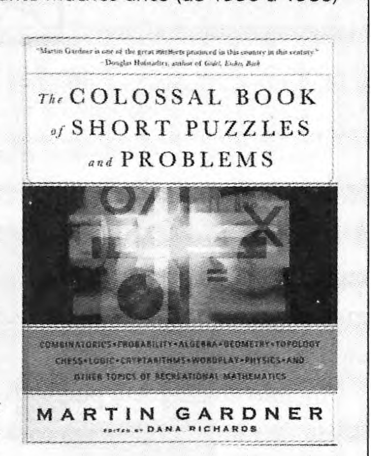
En esta cuadrícula de 7 × 7 deben unirse, mediante cinco líneas continuas que sigan sólo segmentos de la trama de cuadrados y que nunca se crucen, cada uno de los pares de puntos con igual letra asignada.



El lector queda invitado a desarrollar todo su ingenio y paciencia en la búsqueda de la única solución que tiene el problema (antes de precipitarse apresuradamente a consultar la solución).

MARTIN GARDNER (1914-2010)

En el firmamento de las estrellas de la divulgación científica brilla con luz propia la figura del americano Martin Gardner. Nacido en Tulsa, Oklahoma (Estados Unidos), estudió filosofía, pero después de graduarse se dedicó al periodismo. Durante muchos años (de 1956 a 1986) y a través de sus columnas mensuales tituladas «Juegos matemáticos» en el *Scientific American* y de sus celebrados libros, popularizó todo tipo de matemáticas, juegos, algoritmos, paradojas, aplicaciones, rompecabezas, etc. Escribió también sobre filosofía, sobre investigaciones científicas en diversos campos y fue un ilustrado crítico de libros. Curiosamente, Gardner no desarrolló una labor pública dando conferencias o cursos y centró su labor en escribir sus ideas.

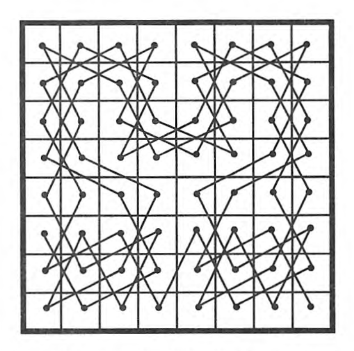


Portada de una de las numerosas publicaciones realizadas por Martin Gardner.

Rutas del caballo en ajedrez

El popular tablero de ajedrez ha dado pie a numerosos retos matemáticos. Un problema clásico es fijar una de las fichas del juego (peón, alfil, rey, caballo, torre...) y estudiar qué tipo de trayectorias puede hacer en el tablero moviéndose por supuesto de acuerdo con las especiales características de desplazamiento que este tipo de figuras tienen predeterminado. Resulta particularmente interesante el caso de los caballos y la cuestión ¿es posible para un caballo de ajedrez hacer un recorrido en el tablero en el que partiendo de un cuadrado pueda regresar al mismo habiendo recorrido todos los cuadrados (64), pasando por todos ellos una sola vez?

La respuesta es sí y la buena noticia es que hay muchos caminos posibles. Este problema, como muchos otros de ajedrez, se puede estudiar mediante teoría de grafos. Cada cuadrado representa un vértice del grafo, cada movimiento del caballo equivale a una línea que une dos vértices de este grafo (respetando la peculiar forma de los saltos) y, por lo tanto, el reto es encontrar un *tour* hamiltoniano con salida y meta en el mismo cuadrado.



Recorrido cerrado del caballo en ajedrez.

Pero las inquietas mentes matemáticas disparan su imaginación a partir del tablero 8×8 e inmediatamente consideran la posibilidad de otros tableros diferentes: 5×5, 6×6, 3×10..., y el problema del caballo o de cualquier otra figura es replanteable en estos nuevos tableros. Así, el tema de los circuitos de Hamilton en grafos con $n \times m$ vértices está servido. Por ejemplo, en 6×6 hay solución, pero no en 5×5 o en 2×8.

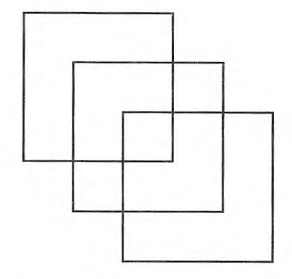
Incluso con la torre puede pasar el lector buenos ratos planteándose trayectorias desde una esquina del tablero a la diagonalmente opuesta, pasando por todos los cuadrados del tablero y considerando el caso 7×7 o en general $n \times n$.

Con un simple juego de ajedrez puede pasar un magnífico verano ocioso, pero lleno de retos..., y aún le faltará tiempo.

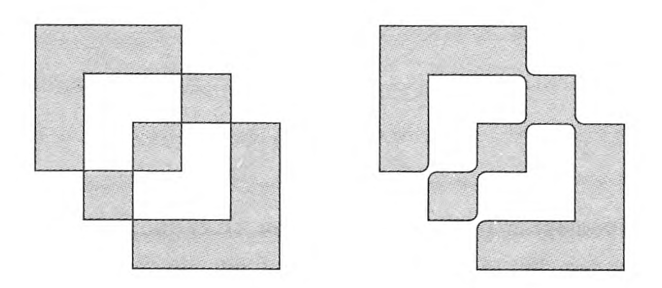
Lewis Carroll y los grafos eulerianos

Charles Lutwitdge Dodgson (1832-1898), alias Lewis Carroll, más allá de escribir *Alicia en el País de las Maravillas*, tuvo siempre una gran afición por todo tipo de matemáticas recreativas. Le gustaba proponer problemas ingeniosos que los niños pudieran resolver; entre ellos propuso algunos que actualmente clasificaríamos dentro de la teoría de grafos (aunque en su época lo único que se consideraba era el hallazgo de cómo recorrer un determinado dibujo sin levantar el lápiz del papel, pasando por todas las líneas sólo una vez).

El grafo más popular de Carroll es el de los tres cuadrados solapados tal como están representados en la figura adjunta. ¿Se anima el lector a recorrer este grafo con un lápiz antes de seguir leyendo?

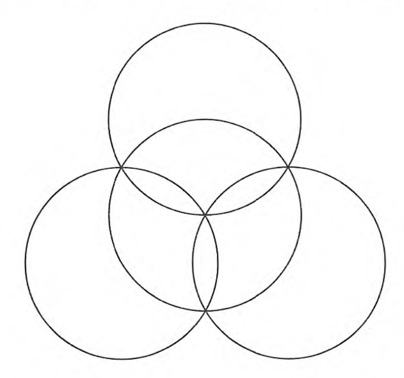


Thomas H. O'Beirne ideó un encantador método para resolver este tipo de problemas, que consistía en colorear regiones alternas (véase la figura siguiente) y entonces «separar» zonas en los vértices para lograr «descubrir» el camino buscado. Visto el contorno de recorrido entonces resultaba ya trivial volver con el lápiz sobre el grafo inicial y realizar el recorrido pertinente.



El problema de las cuatro circunferencias

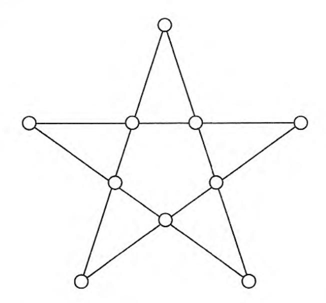
A O'Beirne se le ocurrió planear años más tarde un reto similar al de Carroll, pero cambiando los tres cuadrados por cuatro circunferencias que se intersecaban en una forma maravillosamente simétrica como se puede apreciar en la figura siguiente.



Queda el lector invitado a tener el placer de descubrir cómo hacer el recorrido por todos los arcos de las cuatro circunferencias, pasando por ellos una sola vez. Evidentemente el truco de colorear que acaba de citarse para el caso de Carroll le puede servir de inspiración. Si se desespera después de 25 intentos, puede recurrir a la solución del final del capítulo.

Estrellas mágicas

Las denominadas estrellas mágicas constituyen un juego siempre sorprendente en el que se mezclan grafos y números, formando parte de lo que se ha convenido en llamar combinatoria recreativa.



Observe el pentagrama de la figura anterior, en el que aparece la estrella pentagonal pitagórica con diez vértices marcados en forma de círculos. ¿Es posible colocar

los diez números del 1 al 10 en estos vértices de manera que todas las filas de cuatro vértices sumen lo mismo? Si es posible, a esta suma que se repite en todas las filas se la denomina la *constante mágica*.

¿Quiere intentar distribuir los números en el pentagrama antes de seguir leyendo? ¿Cuál debe ser la constante mágica en el pentagrama?

No se preocupe. No está encontrando una solución porque no la hay. Observe primero que la suma del 1 al 10 es 55 y, como cada número debería aparecer en dos líneas del pentagrama, la suma total de todas las líneas sería el doble de 55, o sea 110. Por lo tanto, la constante mágica debería ser 110/5, es decir 22. Ya sólo falta distribuir los números que hagan posible estas sumas de 22 en cada fila.

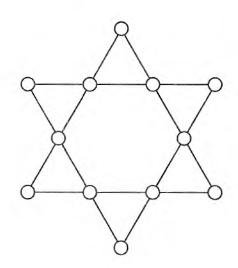
Ian Richards observó lo siguiente: cada una de las líneas que pasen por el vértice donde esté el 1 debe contener tres números que sumen 21 y entre los seis sumen 42, luego el 10 debe estar en una de estas líneas con el 1 (pues otros seis números sin el 10 sólo sumarían como máximo $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$). Si A es la línea que tiene al 1 y al 10, B es la otra línea con el 1 y C la otra con el 10, entonces en la A hay cuatro combinaciones posibles. La 1, 10, 4, 7 haría imposible formar B y C. Por tanto quedan tres casos:

A	*B*	*C*
1, 10, 2, 9	1, 6, 7, 8	10, 5, 4, 3
1, 10, 3, 8	1, 5, 7, 9	10, 6, 4, 2
1, 10, 5, 6	1, 4, 8, 9	10, 7, 3, 2

Pero B y C deben tener un número en común y esto no resulta posible en ningún caso; por lo tanto, queda demostrado que el pentagrama es imposible.

El hexagrama mágico

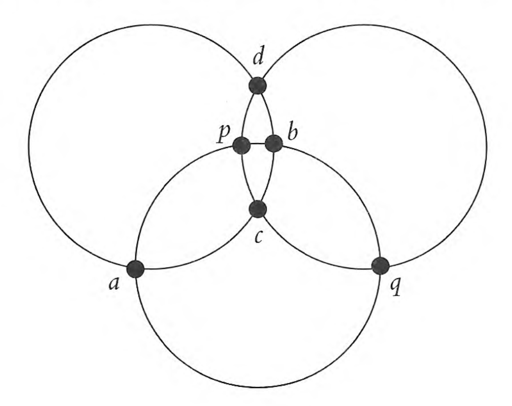
Pasemos ahora a considerar el hexagrama mágico. Se trata de la famosa y mítica estrella de David o sello de Salomón, intersección de dos triángulos equiláteros.



Como puede verse en la figura aparecen 12 vértices distribuidos en 6 líneas de cuatro, por lo cual el reto es ahora distribuir los números del 1 al 12. La constante mágica será, visto que la suma del 1 al 12 es 78, 78 2/6, o sea 26. Afile el lápiz, despeje su mente y dispóngase a descubrir una solución del hexagrama mágico de las decenas de soluciones que hay. Al final del capítulo indicamos una de las soluciones.

Si animado/a por el éxito, ya empieza a manifestar síntomas de adicción hacia las estrellas mágicas, puede dibujarse el septagrama mágico o el octagrama, buscar sus constantes mágicas y hallar algunas de las muchas soluciones que estas estrellas tienen.

Una alternativa más simple y que admite una forma sistemática de resolución es el caso de las circunferencias mágicas: se dan varias circunferencias con todos sus cortes posibles y se trata de distribuir números de forma que en cada circunferencia los vértices que estén en ella sumen una cantidad determinada, por ejemplo, 20. En la siguiente figura tiene tres círculos con las letras a, b, c, d, p, q y a partir de ella puede escribir las relaciones que deben darse entre estas letras.



Tendrá entonces un sistema de ecuaciones:

$$a + b + c + d = 20,$$
$$c + d + p + q = 20,$$
$$a + b + p + q = 20,$$

y sumando ahora las tres ecuaciones resulta

$$2a + 2b + 2c + 2d + 2p + 2q = 60,$$

TEORÍA DE JUEGOS

La teoría de juegos fue fundada por John von Neumann y Oskar Morgenstern para dar nuevos modelos de problemas económicos y con su gran desarrollo matemático ha permitido no sólo poseer un interesante instrumento para modelizar problemas de economía, sino obtener también aplicaciones relevantes en ciencias sociales y políticas, en *marketing*, en finanzas, en psicología, etc.

En su concepción inicial, los propios creadores de la teoría de juegos pensaron con acierto que «los problemas típicos del comportamiento económico son estrictamente idénticos a las nociones matemáticas de juegos de estrategia adecuados» y a partir de esta metáfora fue posible desarrollar análisis de juegos con uno o varios jugadores, introducir funciones de utilidad, análisis de estrategias de diversos tipos (conservadoras, ganadoras, con riesgos...), evaluaciones de la información y sus usos, el tema de las coaliciones y las votaciones, análisis probabilísticos y de procesos en los que interviene el azar, etc.

Como en general el número de «jugadores» (inversores, empresarios, bancos...) es finito y el número de jugadas, estrategias o alternativas también lo es, resulta que muy a menudo la teoría de grafos sirve para hacer análisis propios de la teoría de juegos.

o de forma equivalente:

$$a + b + c + d + p + q = 30.$$

Restando de esta última igualdad cada una de las tres primeras, resulta:

$$a + b = c + d = p + q = 10,$$

y, por lo tanto, hay varias elecciones posibles, por ejemplo:

$$a = 1, b = 9, c = 2, d = 8, p = 3, q = 7.$$

Grafos y educación

A lo largo del siglo XX el gran desarrollo de la teoría de grafos y la ingente cantidad de sus aplicaciones a los problemas más diversos ha asegurado un interés educativo por esta teoría en el nivel superior de la formación reglada.

Los cursos de «Teoría de grafos y sus aplicaciones» forman parte hoy en día de los estudios de matemáticas, de investigación operativa, de matemática discreta, de diversas especialidades de ingeniería (organización de obras, edificación, eléctrica, telecomunicación...) y, por supuesto, están presentes en todos los estudios informáticos.

Lo que realmente aún está pendiente es el aprovechamiento educativo de los grafos en los niveles preuniversitarios. No se trata de dar un capítulo de grafos o de elevar esta teoría al mismo nivel que la aritmética o la geometría, pero diversas experiencias en educación matemática demuestran que hay recursos de la teoría de grafos que sí tienen un alto valor formativo y, por lo tanto, merecen ser incorporados.

Entre las virtudes educativas de los grafos destacaríamos las siguientes:

1. Los grafos son a menudo magníficos ejemplos de *modelización matemática.* A pesar de su simplicidad aportan interesantes situaciones reales que pueden ser descritas y estudiadas asociando grafos.
2. Los grafos ofrecen bellos ejemplos de matemática en la *vida cotidiana* y, por lo tanto, contribuyen a visualizar la presencia del mundo matemático en la realidad de todos los días, facilitando que se establezcan *conexiones*, que es algo trascendental.
3. Trabajando con grafos se promueve el aprendizaje de *formas de razonamiento* que son genuinamente matemáticas y tienen un alto valor formativo. Valgan de ejemplo los razonamientos inductivos, los combinatorios, los espaciales, etc.
4. Los grafos, ya sean recreativos o aplicados, permiten trabajar *la resolución de problemas.* Gracias a las aportaciones de George Pólya se sabe que resolver problemas debe ser uno de los motores en el aprendizaje de las matemáticas.

Dicho todo esto puede releerse un conocido pasaje de *Alicia en el País de las Maravillas* en el que Lewis Carroll inventa este sorprendente diálogo entre Alicia y un gato:

«–¿Quiere decirme, por favor, qué camino debo tomar desde aquí?
–¡Eso depende mucho de dónde quieras ir! –dijo el gato.
–No me importa mucho –dijo Alicia.
–Entonces es indiferente por el camino que vayas –dijo el gato».

El camino de la educación debe permitir una formación de calidad para todos y asegurar también la actualidad de todo lo que se explica y aplica. No es posible que los currículos oficiales queden anclados en temas milenarios o de hace tres siglos y que no sean permeables a temáticas que siendo formativas tratan problemas de la máxima actualidad.

Grafos y redes neuronales

El desarrollo de las ciencias de la computación ha motivado que muchos sean los modelos matemáticos al servicio de conseguir procesos automáticos (hechos por máquinas) que ayuden al progreso humano. Pero dada la tremenda complejidad del pensamiento también los modelos de Inteligencia Artificial han tenido que ofrecer formas no triviales de proceder. Calcular es muy fácil para una máquina, pero recomendar una alternativa entre varias ya es algo de rango muy superior.

En un primer estadio del desarrollo de la Inteligencia Artificial recibieron especial atención los llamados *sistemas expertos,* programas que al incorporar muchas informaciones obtenidas de grandes expertos humanos permitían guiar determinadas soluciones o decisiones. Los sistemas expertos en medicina, para ayudar a diagnosticar a partir de unos determinados parámetros y a la vista de las experiencias de muchos doctores y casos, han sido especialmente exitosos.

Surgieron otras alternativas como los *algoritmos genéticos* (inspirados en la evolución biológica), en los que las situaciones aleatorias tratadas estadísticamente ya influían en los algoritmos o pasos ordenados para resolver un problema concreto (programación evolutiva, programación genética...). En dichos algoritmos los grafos aportaron un lenguaje adecuado para visualizar procesos. A su vez, estos algoritmos, aplicables a todo tipo de diseños, sistemas, redes, predicciones, etc., también han mostrado interesantes relaciones con estudios de teoría de grafos, teoría de juegos, lógica, etc.

En Inteligencia Artificial las ideas sobre las neuronas cerebrales y su funcionamiento sirvieron de metáfora para crear una nueva teoría hoy conocida como teoría de *redes neuronales artificiales* o simplemente *redes neuronales.*

Una *red neuronal* se compone de unas unidades llamadas *neuronas*, las cuales reciben una serie de entradas y emiten nuevas salidas o resultados. Hay interconexiones diversas y las neuronas pueden agruparse por capas. Pueden usar *funciones de propagación* o cálculo con determinadas ponderaciones de los valores entrantes (dichas funciones de propagación pueden ser modificadas y transferidas a determinados

conjuntos de valores). En la programación habitual un algoritmo concreto calcula ordenadamente a partir de las entradas los posibles resultados. En las redes neuronales el objetivo es que la red, a la vista de muchos datos (memoria) pueda «aprender» de forma automática lo que procede y, por lo tanto, ir adaptando los resultados a la vista de lo «aprendido». Debe notarse que junto a la «metáfora neuronal» también el lenguaje propio del aprendizaje humano juega aquí un papel («aprender», «entrenar», «flexibilidad», «tolerancia», «auto-organización», etc.).

Piense en imágenes médicas, reconocimiento de textos escritos a mano, reconocimiento de voz o sonidos, funcionamiento de centrales energéticas, inversiones empresariales, minería de datos informáticos en grandes bases de datos, temas de controles industriales en el funcionamiento de una planta, etc. Hay un numeroso conjunto de aplicaciones en las que la teoría de las redes neuronales tiene su interés. Evidentemente, este modelo se puede combinar con los sistemas expertos, los algoritmos genéticos y muchas otras contribuciones, como la lógica difusa que da «valores de verdad» en el intervalo numérico entre 0 y 1.

Obviamente, muchas redes neuronales pueden dar lugar a tablas numéricas y pueden ser visualizadas mediante grafos dirigidos: las aristas del grafo indicarán dependencias, puntos iniciales y finales, interconexiones, salidas posibles. Como en los mapas de metro con estaciones y líneas, estos grafos ayudan a hacer buenos mapas descriptivos de redes neuronales. Una alternativa al dibujo efectivo del grafo a veces puede ser recoger toda la información en una hoja de cálculo.

Cuanto mayor sea el número de neuronas, el número de entradas y las interconexiones, mayor es la complejidad del proceso.

En la clasificación de las redes neuronales una primera opción, por analogía con los grafos, es distinguir entre redes de propagación hacia delante (sin ciclos, sin conexiones entre neuronas de una misma capa) o las recurrentes en las que al menos hay un ciclo. También pueden clasificarse las redes neuronales por el tipo de «aprendizaje» que son capaces de hacer, o pueden introducirse otros criterios como los tipos de informaciones (imágenes, voces, datos...) que son capaces de procesar.

Algo muy curioso es que incluso las redes neuronales han demostrado ser útiles en la propia matemática cuando no se disponen de unos modelos precisos de cálculo o resolución de problemas, o bien los algoritmos que hay que aplicar son demasiado complejos. Un bello ejemplo de redes neuronales al servicio de las matemáticas es, precisamente, el caso de la teoría de grafos, en la que estas técnicas de redes neuronales permiten abordar, por ejemplo, casos como el del «problema del viajante» que de otra manera no son resolubles en un tiempo razonable.

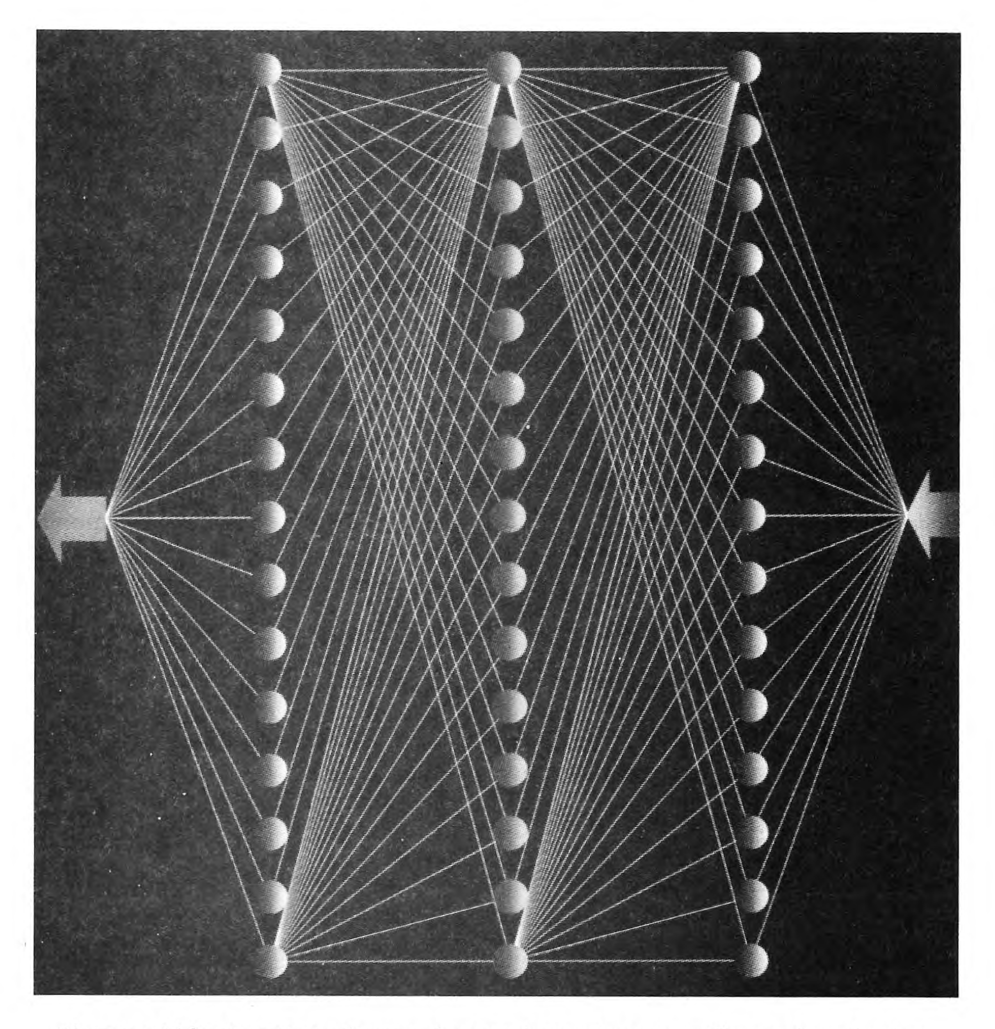


Diagrama del funcionamiento de una red neuronal, como las que se utilizan en las aplicaciones informáticas, en las que los inputs *(la flecha de la derecha) son recibidos por los receptores (círculos de la derecha) que los transmiten a las neuronas (círculos centrales); éstas a su vez dan lugar a una respuesta (círculos de la izquierda) que ocasiona el pertinente* output *(flecha de la izquierda).*

Los grandes avances en ciencias de la computación, en las que máquinas cada vez más sofisticadas se ponen al servicio de teorías matemáticas muy avanzadas, podría dar lugar a creer que no debe faltar mucho para que gran parte de las habilidades humanas puedan ser reemplazadas por máquinas. En acciones repetitivas, donde hay que aplicar algoritmos claros, es cierto que unas máquinas pueden ejecutar ciertas tareas de forma más rápida y eficiente (cálculos numéricos, robótica industrial, pilotos automáticos de aterrizaje de aviones...). Pero a pesar de ello

nunca la maquinaria artificial podrá sustituir la envidiable complejidad de la inteligencia humana capaz de integrar matices y cruzar informaciones en una escala no programable. En el campo de la robótica las redes neuronales sí pueden ayudar a la realización de determinadas acciones, pero cosas aparentemente tan simples como colocar bien las sábanas y mantas en una cama resultan difíciles de programar.

Los conceptos y resultados propios de la teoría de grafos son un instrumento potente para abordar la organización de sistemas complejos. Piense tan sólo en los tan populares grafos sociales en Facebook o Twiter con tantos vértices como amistades (en cada grupo) y grandes números de aristas mostrando relaciones.

Nodos, aristas, grados, ponderaciones, conexiones, ciclos, caminos, distancias, componentes, subgrafos, centralidad, atractores..., tantas y tantas palabras y conceptos de la teoría de grafos se ponen hoy al servicio de mil problemas reales relacionados con redes. Desde metros hasta distribuciones, desde reconocer patrones hasta crear grupos de amigos, desde evitar itinerarios erróneos de robots hasta el caso de imágenes en producciones industriales.

Algunas de las referencias a las máquinas pueden parecer aún hoy de ciencia ficción. Pero lo bueno... aún está por llegar. Mejor estar preparados.

Grafos y programación lineal

Hacia los años cuarenta del siglo XX nació con gran fuerza la llamada «programación lineal», una teoría que ha sido clave en la consolidación de las llamadas ciencias de la administración y que forma parte de la llamada «investigación operativa».

En temas de planificación (horarios, repartos, implantación de proyectos, etc.), pero especialmente en temas de producción con grandes implicaciones económicas en empresas complejas, la programación lineal vino a aportar modelos matemáticos que servían para fijar mejor los objetivos (optimizar beneficios, minimizar costos, etcétera).

Piénsese en una compañía aérea diseñando sus rutas, en una organización militar organizando su logística, en una multinacional que fabrica diversos refrescos (en varios tamaños), en la NASA programando sus aventuras espaciales, en una gran compañía telefónica haciendo sus trazados de líneas, en una compañía de telecomunicaciones ubicando repetidores... Todas estas empresas manejan gran cantidad de datos y buscan objetivos muy claros.

La programación lineal se ha relacionado también con la estadística, la teoría de la decisión y con la teoría de juegos.

Si bien en el momento de su nacimiento la programación lineal no disponía de potentes instrumentos de cálculo, con los años las posibilidades computacionales han permitido dar gran potencia a esta teoría. Se calcula, de hecho, que en muchas empresas entre un 50% y un 90% de sus usos computacionales se dedican hoy en día a resolver estos problemas de computación. Entre las figuras que han aportado contribuciones relevantes a la programación lineal cabe citar a John von Neumann, Leonid Kantorovich, T.C. Koopmans, L.G. Khadrian, George Dantzig y muy especialmente a Narendra Karmarkar, un brillante investigador de la gran compañía telefónica americana AT&T Bell, cuyo algoritmo de programación lineal rompió esquemas en esta teoría.



El matemático John von Neumann, pionero de la programación lineal, charla con sus estudiantes de la Universidad de Princeton en esta fotografía realizada en 1947.

GEORGE DANTZIG (1914-2005)

Considerado el padre de la programación lineal, este ilustre matemático, durante años profesor de la Universidad de Standford, realizó una extensa labor investigadora en este campo ideando el *método del simplex*, que fue esencial para hacer ver el interés práctico de este análisis. Asociada a Dantzig existe una popular historia según la cual habiendo llegado tarde a clase de Jerry Neyman sobre probabilidad, vio dos enunciados en la pizarra. Creyó que eran «deberes» y después de clase los resolvió. Neyman quedó atónito: los enunciados eran dos problemas abiertos no resueltos que él había citado. Si Dantzing lo hubiese sabido quizá nunca se hubiese enfrentado a ellos.

Para captar la esencia de esta teoría veamos un pequeño ejemplo ingenuo pero que explica bien el tipo de problemas que tratamos. Considérese una empresa que fabrica dos tipos de bebidas, A y B, en las que se dan dos combinaciones posibles de frutas, a y b. El beneficio de cada unidad de A vale 6 euros y de la de B 5 euros. Para un periodo dado se disponen de 1.000 litros de a y de 3.000 litros de b. El producto A mezcla 0,5 litros de a con 0,5 litros de b, mientras que el B mezcla 0,3 litros de a con 0,7 litros de b. ¿Se puede optimizar el beneficio? La siguiente tabla resume la situación.

	1.000 litros de *a*	3.000 litros de *b*	Beneficio parcial
Producto *A*	0,5 litros	0,5 litros	6 euros
Producto *B*	0,3 litros	0,7 litros	5 euros

En general el esquema es siempre del tipo siguiente:

1. ¿De qué recursos se dispone?
2. ¿Qué cantidad hay disponible de cada recurso?
3. ¿Cuáles son los productos que se deben fabricar?
4. ¿Cómo se compone cada producto a partir de los recursos?
5. ¿Cuáles son las cantidades desconocidas?
6. ¿Cuál es la fórmula de los beneficios?

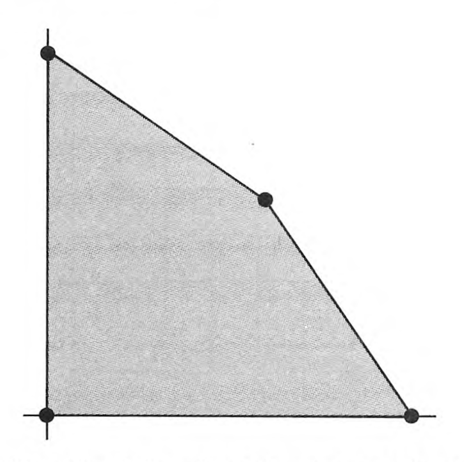
En el ejemplo, sea x la cantidad de unidades de A y sea y la cantidad de unidades del B que hay que producir con los recursos a y b. La *fórmula de los beneficios* que hay que maximizar es:

$$6x + 5y,$$

pero las variables x, y están sometidas a *las restricciones de los recursos*:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$0{,}5x + 0{,}3y \leq 1.000$$
$$0{,}5x + 0{,}7y \leq 3.000$$

Hecho el modelo, el problema es hallar el máximo de $6x + 5y$ entre los valores (x, y) que satisfagan las cuatro restricciones anteriores. Se procede entonces a la representación de la *región viable* que visualiza todos los puntos (x,y) del plano cartesiano que se correspondan con las restricciones.



Representación gráfica de la región viable, que adopta forma poligonal.

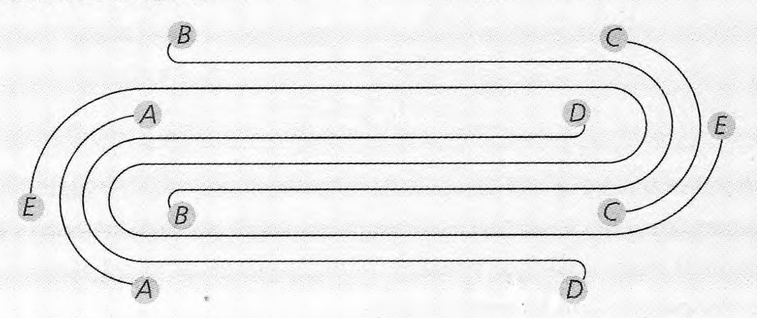
La región viable tendrá una forma poligonal y es precisamente en las esquinas (vértices) de este polígono donde se podrán localizar los valores (x, y) que permiten maximizar el beneficio $6x + 5y$. Para ello se procede a:

1. Calcular las esquinas de la región viable.
2. Evaluar el beneficio en cada una de las esquinas de la región viable.
3. Elegir como política de producción la esquina que más beneficio aporte.

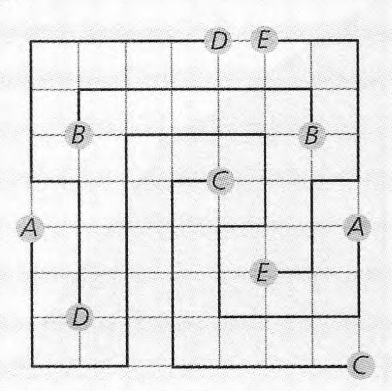
Ya puede intuir que si hay muchos productos y muchos recursos aparecerán regiones viables con muchas esquinas (¡más computación!) y que los esquemas planos serán sustituidos por otros esquemas tridimensionales o más complejos. Y es aquí

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

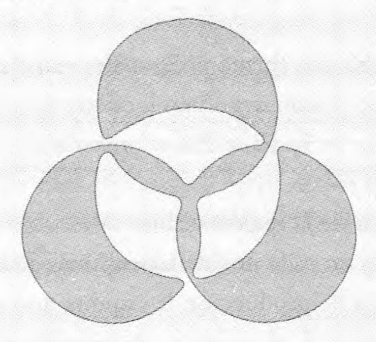
El circuito en un rectángulo:



El circuito en la cuadrícula:



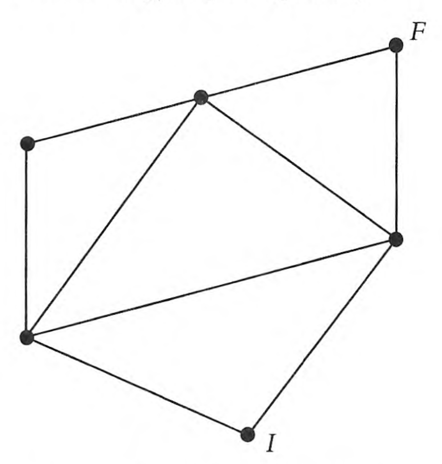
El problema de las cuatro circunferencias:



El hexagrama mágico: Una solución del hexagrama mágico viene dada, colocando los números por filas de arriba abajo: 10; 4, 7, 9, 6; 8, 5; 1, 11, 12, 2; 3.

donde la teoría de grafos aparece de nuevo, en el método del simplex ideado por el pionero George Dantzig que admitía programación informática.

Piénsese en la región viable como un grafo (puede ser un polígono en el plano, un poliedro en el espacio... o un grafo plano general).



Grafo plano de región viable poliédrica.

En lugar de calcular la fórmula de beneficios f en todas las esquinas, la idea es elegir una de ellas aleatoriamente y proceder entonces a calcular f en las esquinas adyacentes. Localizada la esquina más beneficiosa se procede de nuevo a ver qué ocurre en todas sus adyacentes... y así sucesivamente.

La búsqueda de algoritmos rápidos ha sido siempre un objetivo empresarial de primer orden. Las aportaciones de Karmarkar han permitido por ejemplo hallar soluciones óptimas con procesos entre un 50% y un 100% más rápidos que por el método pionero del simplex.

Epílogo

La primera prueba de la aparición del conocimiento abstracto podría ser un grabado o una pintura rupestre de hace unos 35.000 años.
Jorge Wagensberg

Hay libros que se guardan directamente y no se leen. Otros libros se leen pero no se guardan. Y hay libros que se leen, se guardan e inducen a la búsqueda de más libros sobre el mismo tema. Mucho nos gustaría que esta pequeña guía del mundo de los grafos estuviese en esta tercera categoría de libros. De hecho, hay numerosísimos tratados sobre la teoría de grafos y sus más diversas aplicaciones –algunos de los cuales aparecen en la bibliografía– o sobre campos próximos del conocimiento (topología, algorítmica, matemática discreta, etc.). Le animamos a que, si el tema es de su interés, pueda ampliar sus conocimientos.

Ahora, acabada la lectura de este pequeño volumen, más allá de todos los detalles e ideas que haya podido descubrir, nos gustaría que cerrase la lectura manteniendo en su mente la idea clave de lo que la teoría de grafos demuestra: con esquemas extraordinariamente simples de puntos y líneas es posible, mediante ingeniosos razonamientos, describir y resolver muchos problemas que surgen en situaciones interesantes y muy diversas. Ésta es la revolución de los esquemas: la potencia de su simplicidad.

La realidad es compleja, muchos son los factores y características que influyen en todas las cosas y todos los fenómenos, pero a veces el arte de simplificar, de prescindir de detalles ajenos a la esencia del problema y meditar tan sólo sobre aquello que es sustancial, es el mejor camino para comprender más y mejor el asunto que se analiza.

La potencia de la simplicidad de los grafos quizá tenga un claro paralelismo con lo que ha sido el desarrollo del arte a lo largo del siglo XX. En lugar de seguir hacia metas hiperrealistas o hacia barroquismos crecientes, importantes movimientos de la pintura y la escultura han redescubierto el valor artístico de los puntos de colores, de los trazos cromáticos de las líneas, de las formas geométricas más puras... evidenciando como de las formas esenciales y de los colores básicos era posible crear nuevos códigos expresivos, nuevos cánones estéticos y renovados repertorios para transmitir emociones.

La teoría de grafos le invita a mantener esta visión por lo esencial y lo necesario ante un mundo tan complicado.

Acabamos este epílogo con una referencia filosófica a la famosa cuestión ¿por qué el espacio real de nuestro entorno donde vivimos tiene dimensión tres? Ya hace años G.J. Whitrow en su obra *La estructura y evolución del universo* argumentó que en dimensiones físicas superiores a tres la estabilidad y el movimiento perfecto de los planetas alrededor del sol no sería posible. Pero en dimensión dos tampoco sería factible la vida inteligente tal y como la teoría de grafos hace ver: la mente precisa de una cantidad enorme de neuronas (¡vértices!) conectadas entre sí por nervios (¡aristas!) que no deben cruzarse entre ellos. Tal y como muestran los grafos planos en un mundo de dimensión dos esta conectividad neuronal sería imposible. Es particularmente interesante esta analogía de Whitrow: incluso nuestra propia mente es imaginable como un inmenso grafo neuronal.

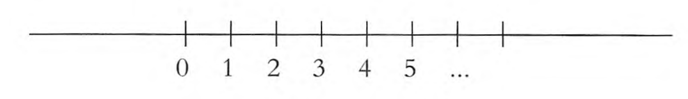
Que los buenos grafos le acompañen y pueda disfrutar de ellos.

Anexo

Grafos, conjuntos, relaciones

El gran edificio matemático tiene, como todo edificio sólido, unos importantes fundamentos. La *lógica* juega, por supuesto, un papel esencial para fijar las reglas deductivas, los conceptos de verdad y falsedad, las distinciones entre axiomas/postulados y teoremas, las formas admisibles de demostración, etc. La *teoría de conjuntos* es otro pilar básico del edificio, con la cual se pueden formalizar los conceptos más genuinos de las *estructuras* matemáticas: elementos, conjuntos, relaciones, funciones...

En la aproximación intuitiva a la teoría de conjuntos se usan a la vez descripciones simbólicas y descripciones gráficas. Si $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ denota el conjunto de los números naturales, en la siguiente figura se representa este conjunto mediante puntitos marcados en una recta.



Naturales en la recta.

GEORG CANTOR (1845-1918) Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Este genial matemático alemán creó la teoría de conjuntos con el fin de dar un mayor rigor a muchos conceptos matemáticos y, en particular, poder abordar con nitidez el concepto de infinito. Frege y Dedekind también hicieron contribuciones relevantes. Gracias a Cantor pudo considerarse que «un conjunto finito es uno que no es infinito» y un conjunto A se dirá que es infinito si puede existir una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre él y un subconjunto propio. Cantor aclaró el tema de los conjuntos infinitos «numerables» (como los números naturales, enteros o fraccionarios), estableciendo diversas categorías de infinitos (números transfinitos, cardinales y ordinales). Todas estas ideas causaron feroces confrontaciones con otros matemáticos de su tiempo (con Leopold Kronecker como principal enemigo) y dieron origen a numerosas paradojas que tuvieron que superarse. ¡Pero nació una bella, potente y fundamental teoría de conjuntos!

Para conjuntos finitos $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,e,f\}$ es usual usar los *diagramas de Venn*, donde los elementos se representan por puntitos dispersos y mediante curvas cerradas se delimitan sus agrupaciones.

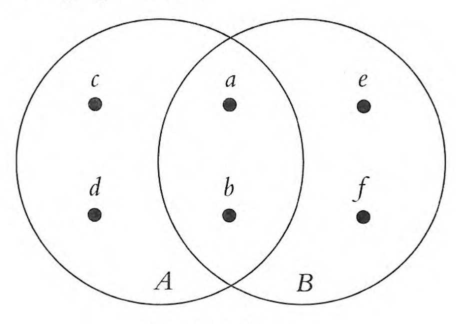
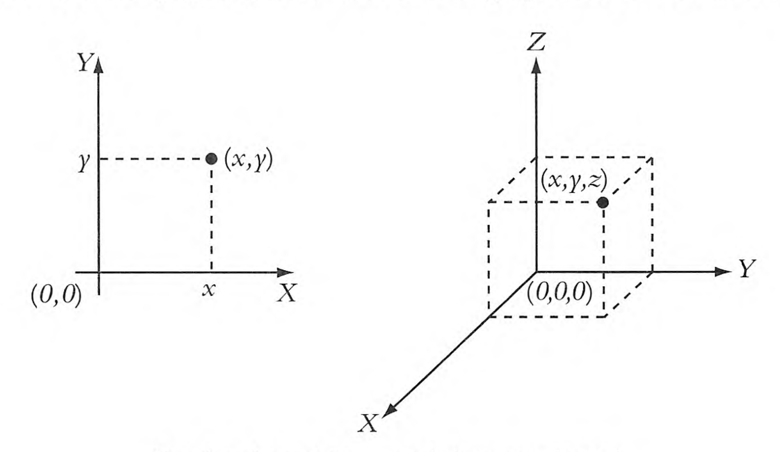


Diagrama de Venn.

A partir de dos conjuntos A, B se define el *producto cartesiano* $A\times B$ de la forma:

$$A\times B=\{(a,b);a \text{ en } A,\ b \text{ en } B\},$$

es decir, el conjunto de todos los pares ordenados (a,b). Este producto enlaza con la tradición iniciada por René Descartes de situar puntos en el plano (x,y) o en el espacio (x,y,z) mediante estos números ordenados que son las coordenadas (o proyecciones sobre los ejes). Las palabras también son agrupaciones ordenadas de letras…

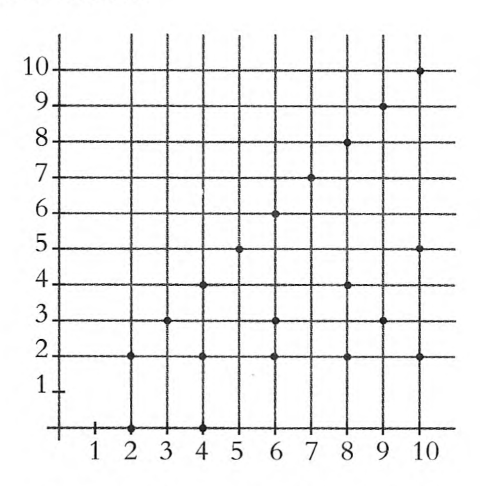


Coordenadas cartesianas en el plano y en el espacio.

En el marco de los productos cartesianos $A\times A$ de un conjunto por sí mismo es donde es posible formalizar el concepto clave de *relación* R como subconjunto de $A\times A$, es decir, la relación indica los elementos de A que están relacionados entre sí.

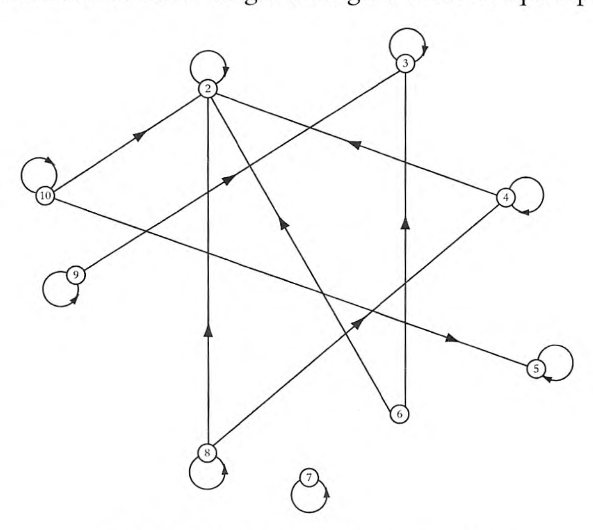
Si (a,b) está en R, ambos elementos a y b tienen relación, y si (a,c) no está en R, el a que estaba relacionado con b no lo está con c. Así, dada la relación R, para cada elemento a tiene sentido considerar la *clase* de todos los elementos relacionados con a. Si (a, b) es de R también se escribe «a R b» para indicar «su» relación.

Considérese por ejemplo el conjunto $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y la relación R en A: a R b si «a es múltiplo de b». Una opción sería usar una representación cartesiana indicando los pares relacionados.



Representación cartesiana de una relación.

Pero otra alternativa sería usar un grafo dirigido como el aquí representado:



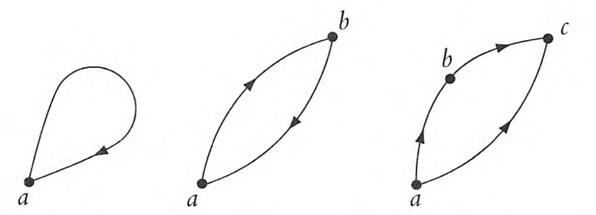
Grafo dirigido representando una relación.

Relaciones de equivalencia

Con vistas a poder hacer *clasificaciones* en un conjunto son especialmente interesantes las llamadas *relaciones de equivalencia* R en un conjunto A. Para ellas se exigen tres propiedades:

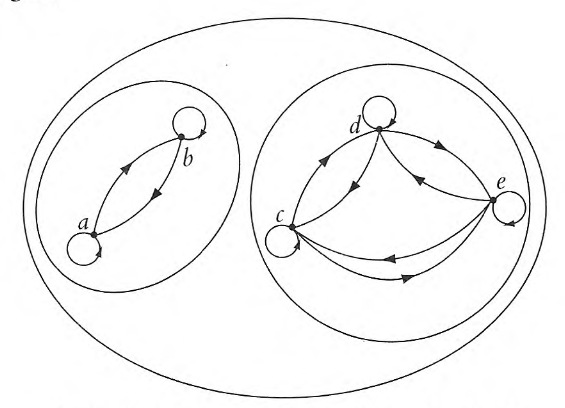
a. Propiedad reflexiva: $a \; R \; a$.
b. Propiedad simétrica: si $a \; R \; b$ es $b \; R \; a$.
c. Propiedad transitiva: si $a \; R \; b$ y $b \; R \; c$ entonces $a \; R \; c$.

Dicho en palabras, todo elemento está relacionado consigo mismo, hay simetría en la relación y transitividad en las ternas relacionadas. Cuando R satisface todas estas propiedades entonces el conjunto A queda clasificado (dividido) en *clases*. Estas relaciones, en conjuntos finitos, pueden representarse mediante grafos: los elementos se representan por puntitos y se unen mediante líneas orientadas a aquellos que están relacionados.



Representación con grafos de las propiedades de una relación de equivalencia.

Como la relación de equivalencia lleva a la clasificación, pueden darse esquemas como los de la figura.



Clasificación asociada a una relación de equivalencia.

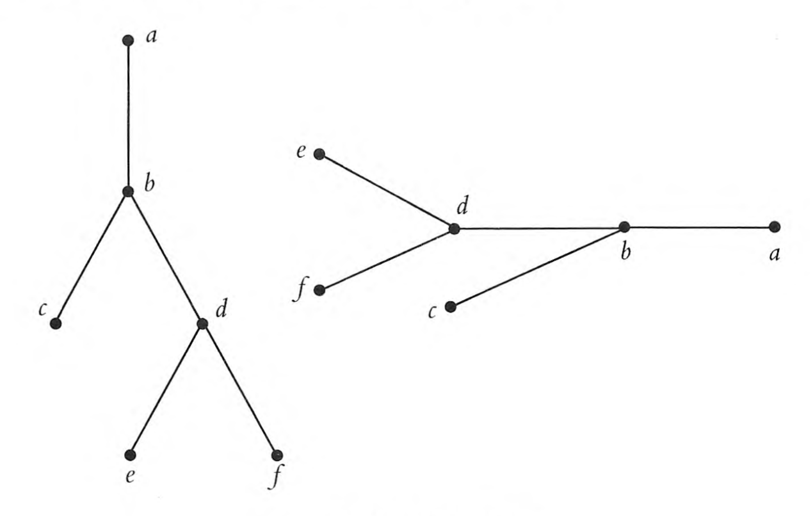
Si A es un conjunto de personas y R es la relación «tener la misma edad» la clasificación le permite a usted considerar las clases de edades. Si A es el conjunto de los enteros y R es la relación entre números aRb si $a - b$ es múltiplo entero de 2 tendrá la clasificación en pares e impares.

Relaciones de orden

Otro tipo de relaciones imprescindibles en matemáticas (y en la vida) son las de *orden*, a las cuales se les exigen las siguientes propiedades:

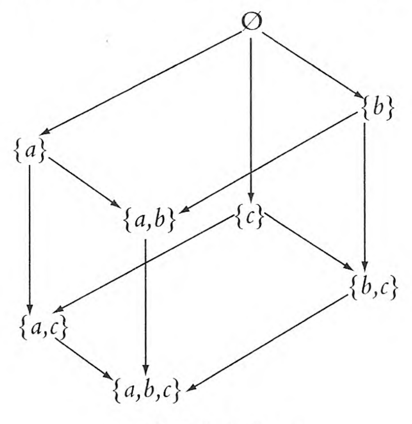
a. Propiedad reflexiva: $a\ R\ a$.
b. Propiedad antisimétrica: si $a\ R\ b$ y $b\ R\ a$ debe ser $a = b$.
c. Propiedad transitiva: si $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$ entonces $a\ R\ c$.

En lugar de «$a\ R\ b$» se introduce normalmente la notación «$a \leq b$», la cual es bien conocida a nivel numérico $(0 \leq 1 \leq 2 \leq \ldots)$. Entonces para cada elemento a tiene sentido considerar el conjunto $\{b/a \leq b\}$ de todos los que son mayores que a o $\{b/b \leq a\}$ de todos los que son menor que a. De nuevo, a nivel de grafos, es posible introducir representaciones asignando vértices a los elementos, líneas de unión entre los elementos ordenados y adoptar un criterio de verticalidad («los que quedan por debajo son menores»), de horizontalidad («los que quedan a un lado son mayores») o bien usar grafos dirigidos para indicar bien el orden.



Visualización de ordenaciones.

En la figura siguiente, con flechas que denotan estar «incluido en», se puede apreciar la ordenación de las partes de un conjunto formado por tres elementos $\{a,b,c\}$.



Grafo de inclusiones.

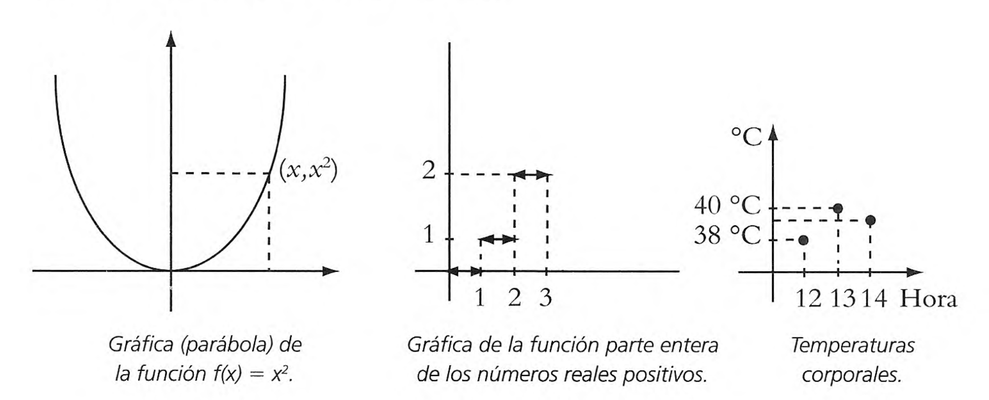
Los árboles genealógicos son ejemplos de ordenaciones entre personas. También las flechas pueden ayudar a remarcar el orden, pero su presencia puede ser sustituida por estos criterios de verticalidad u horizontalidad.

Aplicaciones

Otra noción básica en teoría de conjuntos es la consideración de aplicaciones $f: A \rightarrow B$, donde a los elementos a de A se les asigna un único elemento $b = f(a)$ de B. Esto lleva a considerar la *gráfica* de f como

$$\text{Gráfica } (f) = \{(a, f(a)) / a \text{ en } A\}$$

y a representar en $A \times B$ dicho conjunto.



Gráfica (parábola) de la función f(x) = x².

Gráfica de la función parte entera de los números reales positivos.

Temperaturas corporales.

GEORGES PEREC Y SU «PENSAR/CLASIFICAR»

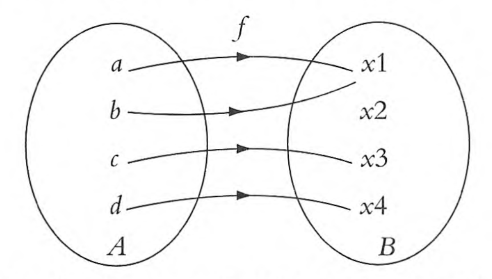
El lúcido y provocador intelectual Georges Perec publicó entre 1976 y 1982 numerosos artículos de tipo surrealista pero con alto contenido crítico. Dos artículos brillantes fueron precisamente sobre «Pensar/Clasificar» y «Notas breves sobre el arte y el modo de ordenar los libros». En ellos Perec nos hace ver lo difícil que puede ser en nuestra vida lograr clasificar cosas o personas, ordenar libros, etc. Por ejemplo, Perec pone en evidencia la enorme dificultad de formar una biblioteca «ordenada», pues los libros podrían ser clasificados/ordenados por orden alfabético de apellidos de autores, por colores de tapas, por tipos de encuadernación, por fechas de compra, por fechas de publicación, por formato, por géneros, por idiomas... De la teoría a la práctica siempre pueden aparecer situaciones difíciles de resolver.

Obviamente las calculadoras gráficas y los programas informáticos actuales permiten el trazado de perfectas representaciones funcionales. Pero en muchos casos estas representaciones son gráficas intuitivas o aproximadas.

En los dos primeros ejemplos se pueden visualizar dos funciones bien definidas por fórmulas, pero en el tercer ejemplo la información se reduce a un grafo de puntos que reúne unas pocas informaciones térmicas. ¿Cómo extrapolar las temperaturas razonables entre las horas sobre las que se poseen datos? Obviamente se pueden unir los puntos por rectas, aunque podrían ensayarse otras opciones.

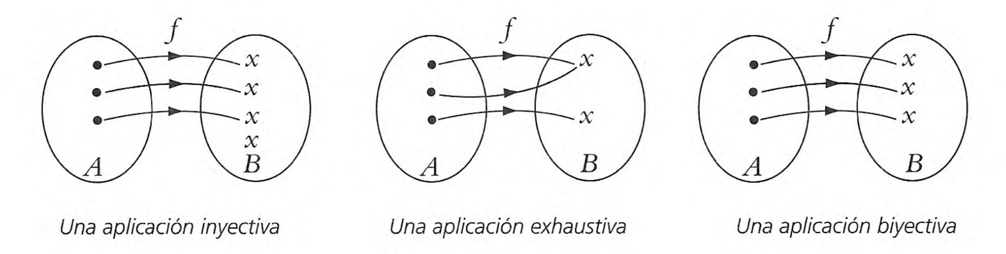
En el mundo de los datos empíricos son muy frecuentes los grafos con un número finito de puntos $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$. El estudio de gráficas que pasen por estos puntos, o aproximen bien la distribución de todos ellos, es de gran interés en estadística, especialmente cuando se pretende ver si hay relación entre los valores de una variable $x_1, \ldots, x_n$ y los de otra $y_1, \ldots, y_n$.

Para aplicaciones entre dos conjuntos finitos A y B también es usual usar una representación que combina grafos con diagramas de Venn.



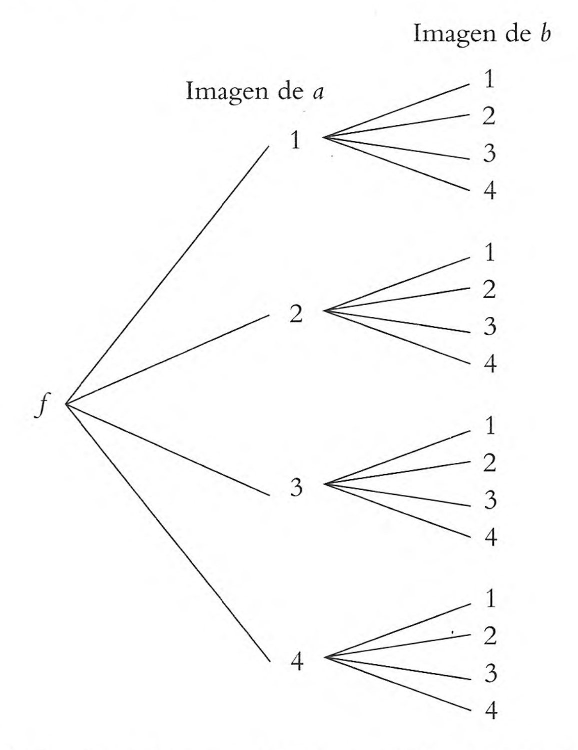
Visualización de aplicación f de {a,b,c,d} en {1,2,3,4}.

Cuando elementos diferentes tienen imágenes diferentes se dice que la aplicación es *inyectiva*; cuando todo elemento del conjunto de llegada es imagen de algún elemento se dice que la aplicación es *exhaustiva* (o suprayectiva); y cuando la aplicación es a la vez inyectiva y exhaustiva, es decir, hay una correspondencia uno-a-uno entre los elementos, entonces se dice que la aplicación es *biyectiva*. Los siguientes grafos ilustran estas tres categorías.



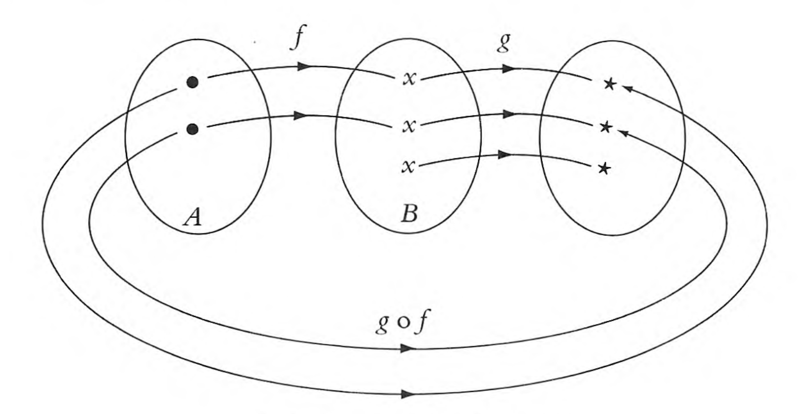
Una aplicación inyectiva *Una aplicación exhaustiva* *Una aplicación biyectiva*

Para hallar todas las posibles aplicaciones de un conjunto finito A en otro B es útil usar grafos que sean árboles.



Árbol de las posibles aplicaciones de $A = \{a,b\}$ en $B = \{1,2,3,4\}$.

En el caso de tener dos aplicaciones f de A en B y g de B en C tiene sentido hallar la *composición* $g \circ f$ de A en C que a todo a de A asigna $g(f(a))$ en C. Entonces, en el caso finito, aparecen grafos de composición del siguiente estilo.

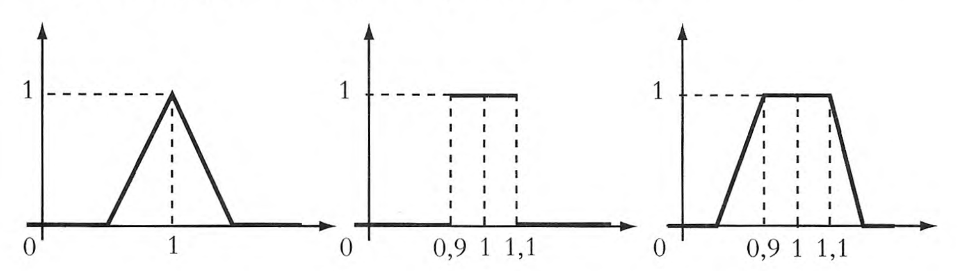


Grafo de composición de g con f.

Conjuntos y grafos borrosos

En las últimas décadas y con el objetivo de modelizar muchas situaciones de la vida real que son complejas se ha desarrollado con gran acierto la *teoría de los conjuntos borrosos*, fundada por el ingeniero de la Universidad de California (Berkeley) Lotfi Zadeh. En el enfoque clásico un elemento a pertenece o no pertenece a un conjunto A y, por tanto, dicho conjunto puede identificarse con su *función característica* (vale 1 en los elementos de A y 0 en los que no son de A).

La idea de Zadeh fue extender las funciones características y construir *conjuntos borrosos*, es decir, funciones f asociadas a un conjunto A en un universo X que asignan a los elementos x de X valores $f(x)$ entre 0 y 1 (intervalo real unidad $[0,1]$) interpretándose $f(x)$ como el *grado de pertenencia* de x a A.



Conjunto borrosos modelizando «el resultado es aproximadamente 1».

REVISTAS SOBRE MATEMÁTICAS DISCRETAS, COMBINATORIA Y GRAFOS

Las principales revistas actuales sobre estas materias son:

- *Ars Combinatorica.*
- *Combinatorica.*
- *Combinatorics, Probabbility and Computing.*
- *Designs, Codes and Cryptology.*
- *Discrete and Computational Geometry.*
- *Discrete Applied Mathematics.*
- *Discrete Mathematics.*
- *Electronic Journal of Combinatorics.*
- *European Journal of Combinatorics.*
- *Geombinatorics.*
- *Journal of Algebraic Combinatorics.*
- *Journal of Combinatorial Theory. Series A.*
- *Journal of Combinatorial Theory. Series B.*
- *Journal of Geometry.*
- *Journal of Graph Theory.*

Diversos pueden ser los modelos borrosos asociados a un mismo concepto vago y de ahí surge el interés del tema al poder abordarse diferentes alternativas. Problemas de inteligencia artificial, de control de máquinas, de fotografías digitales, de reconocimiento de imágenes, etc., incluso lavadoras con *fuzzy logic*, han sido bellos y útiles ejemplos de aplicaciones de esta teoría. Introducir *grados* es una gran idea. Entre el blanco y el negro hay una infinita escala de grises.

En el marco de esta teoría de conjuntos borrosos aparecen también los temas claves de hacer *clasificaciones y ordenaciones borrosas* y poder introducir *grados de relación*. Esta teoría presupone la de conjuntos y se podría ejemplificar con la de probabilidades (que son valoraciones entre 0 y 1), pero tiene su interés en los modelos empíricos y en dar soluciones a problemas que no poseen una perfecta y nítida solución en el marco clásico de los modelos matemáticos.

En particular, en la teoría de conjuntos borrosos aparecen de nuevo los *grafos de relaciones*, pero en este caso los valores entre 0 y 1 que se asignan a las parejas de elementos relacionados se asocian a las aristas del grafo; es decir, son *grafos ponderados.*

Con los comentarios de este apartado nos gustaría haber mostrado cómo la teoría de grafos admite también una formulación en el marco teórico de la teoría de conjuntos y cómo, en la propia visualización matemática, los grafos pueden jugar un importante papel.

Glosario

Algoritmo. Descripción paso a paso de cómo resolver un problema.

Árbol. Grafo conexo sin circuitos o ciclos.

Árbol expandido de un grafo. Subgrafo con el mayor número posible de aristas que es en sí mismo un árbol.

Arco. Par ordenado de vértices, representado por una arista con flecha.

Arcos adyacentes. Dos arcos que tienen un vértice común.

Arista. Enlace entre dos vértices de un grafo.

Aristas adyacentes. Dos aristas que tienen un vértice común.

Bosque. Conjunto de grafos que son árboles.

Bucle. Arco o arista que comienza y acaba en el mismo vértice.

Camino. Sucesión de arcos o aristas adyacentes.

Camino crítico. Camino más largo de un dígrafo con requerimientos de orden.

Cara. Región limitada por las aristas de un grafo.

Circuito. Camino que comienza y acaba en el mismo vértice.

Circuito de Euler (euleriano). Circuito que pasa por cada arista de un grafo exactamente una vez.

Circuito hamiltoniano. Circuito que empieza y acaba en un mismo vértice recorriendo a través de aristas del grafo todos los otros vértices una sola vez.

Coloreado de un grafo. Asignación de colores a vértices, aristas o caras de un grafo cumpliendo determinadas condiciones.

Dígrafo. Grafo con aristas orientadas mediante flechas, es decir, con arcos.

Etiqueta. Información asociada a los vértices y las aristas de un grafo, como puedan ser números, palabras, medidas, nombres...

Flujo. Cantidad de algo asociada a una arista, arco o grafo.

Grado de un vértice. Número de aristas de un grafo que inciden en el vértice.

Grafo. Estructura matemática determinada por unos *puntos* (o vértices) y por unas *aristas* o líneas entre algunos de estos puntos.

Grafo completo. Grafo en el cual todo par de vértices está unido por una arista del grafo.

Grafo conexo. Grafo en el cual entre dos vértices cualesquiera puede hacerse un recorrido a través de aristas del grafo.

Grafo euleriano. Grafo con un circuito euleriano.

Grafo hamiltoniano. Grafo con un circuito hamiltoniano.

Grafo orientado. Grafo cuyas aristas son todas arcos orientados.

Grafo plano. Grafo en cuya representación las aristas sólo se cortan en vértices.

Grafo ponderado. Grafo con números asociados a vértices o aristas.

Grafos homeomorfos. Par de grafos tal que se puede pasar del uno al otro añadiendo o suprimiendo vértices de grado dos en sus aristas; son idénticos si en ambos se suprimen los vértices de grado dos.

Grafos isomorfos. Par de grafos entre los que hay una correspondencia biunívoca entre vértices y entre aristas, respetando dicha correspondencia las relaciones de adyacencia y los grados.

Matriz de un grafo. Conjunto ordenado de $n \times n$ números que son 1 o 0 y que se corresponden con las aristas existentes (1) o inexistentes (0) entre n vértices.

Nodo. Vértice.

Nudo. Vértice.

Organigrama. Grafo que ordena informaciones, pasos que se deben seguir en una tarea o aspectos organizativos.

Peso. Valor asignado a la arista de un grafo indicando coste, distancia, tiempo, etc.

Red. Grafo usado en transportes o distribuciones.

Solución óptima. La mejor solución (respecto de algún criterio cuantitativo) entre un conjunto de soluciones posibles.

Subgrafo (de un grafo). Grafo determinado por algunos de los vértices del grafo y algunas de las aristas entre ellos.

Trayectoria. Camino.

Vértice. Punto de un grafo, aislado o donde terminan una o más aristas.

Bibliografía

ALEXANDER, Ch., *Ensayo sobre la síntesis de la forma*, Buenos Aires, Infinito, 1976.

—: *Tres aspectos de matemática y diseño*, Barcelona, Tusquets, 1969.

ALSINA, C., *Vitaminas matemáticas*, Barcelona, Ariel, 2008.

—: y NELSEN, R.B., *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*, Washington, MAA, 2006.

BELTRAND, E.J., *Models for Public Systems Analysis*, Nueva York, Academic Press, 1977.

BERGE, C., *Graphes*, París, Gauthier-Villars, 1987.

—: *Graphs and Hypergraphs*, Amsterdam, North-Holland, 1973.

BURR, S., *The mathematics of Networks, American Mathematical Society*, Providence, R.I., 1982.

BUSAKER, R.G. y SAATY, T.L., *Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications*, Nueva York, McGraw-Hill, 1965.

CORIAT, M. et al., *Nudos y nexos. Redes en la escuela*, Madrid, Síntesis, 1989.

DE GUZMÁN, M., *Cuentos con cuentas*, Barcelona, Labor, 1985.

FERNÁNDEZ, J. y RODRÍGUEZ, M.I., *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*, Madrid, Síntesis, 1989.

FOULDS, L.R., *Graph Theory Applications*, Nueva York, Springer Verlag, 1992.

HARARY, F., *Graph Theory*, Reading, Addison-Wesley, 1994.

KAUFMANN, A., *Puntos y flechas (teoría de los grafos)*. Barcelona, Marcombo, 1976.

ORE, O., *Teoría y aplicación de los gráficos*, Bogotá, Norma, 1966.

—: *The Four Color Problem*, Nueva York, Academic Press, 1967.

STEEN, L. (ed.), *For all Practical Purposes: Introduction to Contemporary Mathematics*, Nueva York, W.H. Freeman and Company, 1994.

WILSON, R., *Four Colours Suffice: How the Map Problem Was Solved*, Londres, Penguin Books Ltd., 2003.

WIRTH, N., *Algoritmos y estructuras de datos*, México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1987.

Indice analítico

Mapas del metro y redes neuronales

La teoría de grafos

Un grafo es una construcción extraordinariamente simple: unos puntos y las líneas que los unen. Son grafos desde el mapa del metro hasta la ruta de un mensajero, y en general, las redes de todo tipo que cimentan el mundo contemporáneo. La observación cuidadosa de estas simples estructuras nos abre los ojos a un universo de enlaces y conexiones donde las matemáticas reinan supremas.